

# Теория категорий

## Монады

Валерий Исаев

11 марта 2019 г.

## Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

Определение

Свойства категории моделей

Связь с монадами

# Определение

## Definition

Монада на категории  $\mathbf{C}$  – это тройка  $(T, \eta, \mu)$ , состоящая из эндифунктора  $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , и пары естественных преобразований  $\eta_A : A \rightarrow T(A)$  и  $\mu_A : TT(A) \rightarrow T(A)$ . Эта тройка должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{array}{ccc} TTT(A) & \xrightarrow{T(\mu_A)} & TT(A) \\ \mu_{T(A)} \downarrow & & \downarrow \mu_A \\ TT(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} T(A) & \xrightarrow{\eta_{T(A)}} & TT(A) & \xleftarrow{T(\eta_A)} & T(A) \\ & \searrow id_{T(A)} & \downarrow \mu_A & \swarrow id_{T(A)} & \\ & & T(A) & & \end{array}$$

## Монады из сопряжения

- ▶ Если  $(F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}, \eta_A : A \rightarrow GF(A), \epsilon_B : FG(B) \rightarrow B)$  – сопряжение, то  $(G \circ F, \eta, G(\epsilon_{F(A)}))$  – монада.
- ▶ Коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 GF\!G\!F\!G\!F(A) & \xrightarrow{GF\!G(\epsilon_{F(A)})} & GF\!G\!F(A) \\
 \downarrow G(\epsilon_{GF\!G\!F(A)}) & & \downarrow G(\epsilon_{F(A)}) \\
 GF\!G\!F(A) & \xrightarrow{G(\epsilon_{F(A)})} & GF(A)
 \end{array}$$

следует из того факта, что  $\epsilon$  – естественное преобразование.

## Монады из сопряжения

Коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 GF(A) & \xrightarrow{\eta_{GF(A)}} & GFGF(A) & \xleftarrow{GF(\eta_A)} & GF(A) \\
 & \searrow id_{GF(A)} & \downarrow G(\epsilon_{F(A)}) & & \swarrow id_{GF(A)} \\
 & & GF(A) & & 
 \end{array}$$

следует из свойств единицы и коединицы.



## Примеры монад из сопряжения

- ▶ В категории **Agda** функтор  $- \times B$  является левым сопряженным. Как называется монада, соответствующая этому сопряжению?
- ▶ Мы видели пример сопряжения между категорией моноидов и категорией множеств. Монада на категории **Set**, соответствующая этому сопряжению, является аналогом монады списков в категории **Agda**.
- ▶ Можно ли в категории **Agda** определить аналоги монад над категорией **Set**, соответствующих другим алгебраическим структурам?
- ▶ Иногда можно, если правильно определить *instance Eq* для типа монад.

# План лекции

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

Определение

Свойства категории моделей

Связь с монадами

## Мотивация

- ▶ Пусть  $T$  – монада над категорией  $\mathbf{C}$ , которая получена из некоторого сопряжения.
- ▶ Можно ли восстановить это сопряжение по монаде?
- ▶ Не всегда, но если исходное сопряжения достаточно хорошее (говорят, что оно *монадично*), то можно.



## Определение алгебр

### Definition

Пусть  $(T, \eta, \mu)$  – монада над  $\mathbf{C}$ . Тогда  $T$ -алгебра – это пара  $(A, h)$ , где  $A$  – объект  $\mathbf{C}$  и  $h : T(A) \rightarrow A$  – морфизм, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{array}{ccc}
 TT(A) & \xrightarrow{T(h)} & T(A) \\
 \mu_A \downarrow & & \downarrow h \\
 T(A) & \xrightarrow{h} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\
 \searrow id_A & & \downarrow h \\
 & & A
 \end{array}$$

## Определение категории алгебр

### Definition

Морфизм  $T$ -алгебр  $(A, h)$  и  $(A', h')$  – это  $\mathbf{C}$ -морфизм  $f : A \rightarrow A'$ , удовлетворяющий следующему условию:

$$\begin{array}{ccc}
 T(A) & \xrightarrow{h} & A \\
 T(f) \downarrow & & \downarrow f \\
 T(A') & \xrightarrow{h'} & A'
 \end{array}$$

Тождественный морфизм и композиция морфизмов определены так же, как в  $\mathbf{C}$ . Это задает категорию  $T$ -алгебр, которую мы будем обозначать  $T\text{-alg}$ .

## Примеры категорий алгебр

- ▶ Пусть  $T : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  – монада, соответствующая сопряжению  $F \dashv U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ . То есть  $T(A)$  – множество конечных последовательностей элементов из  $A$ .
- ▶ Тогда структура  $T$ -алгебры на множестве  $A$  состоит из функции  $h : T(A) \rightarrow A$ , удовлетворяющей ряду аксиом.
- ▶ Если  $A$  – моноид, то мы можем определить  $h$  как  $h([a_1 \dots a_n]) = a_1 * \dots * a_n$ .
- ▶ И наоборот, если на  $A$  есть структура  $T$ -алгебры, то на  $A$  есть структура моноида:  $1 = h([])$  и  $a * b = h([a b])$ .
- ▶ Можно показать, структура  $T$ -алгебры и структура моноида на множестве  $A$  – это одно и то же.
- ▶ Можно показать, что категории  $T$ -алгебр и моноидов изоморфны.

## Примеры категорий алгебр

- ▶ В общем случае это тоже верно.
- ▶ Пусть  $T : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  – монада, соответствующая некоторому “алгебраическому” сопряжению  $F \dashv U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ , где  $\mathbf{D}$  – категория каких-либо алгебраических структур.
- ▶ Тогда категории  $T$ -алгебр изоморфна категории  $\mathbf{D}$ .
- ▶ Это следует из теоремы Бека, которую мы доказывать не будем.

## Примеры алгебр

- ▶ Тип *Tree* бинарных деревьев

$$\text{data Tree } a = \text{Leaf } a \mid \text{Node (Tree } a) \text{ (Tree } a)$$

является монадой.

- ▶ Алгебра над *Tree* – это тип  $X$  с одной бинарной операцией  $* : X \times X \rightarrow X$ .
- ▶ Связь становится более очевидной, если переписать тип *Tree* следующим образом:

$$\text{data Expr } a = \text{Var } a \mid \text{Expr } a : * \text{ Expr } a$$

## Монадичность алгебр

- ▶ Пусть  $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  – монада. Из категории алгебр существует забывающий функтор  $U^T : T\text{-alg} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $U^T(A, h) = A$ .
- ▶ Существует функтор  $F^T : \mathbf{C} \rightarrow T\text{-alg}$ , сопоставляющий каждому объекту  $A$  свободную  $T$ -алгебру на  $A$ .

$$F^T(A) = (T(A), \mu_A)$$

- ▶  $F^T$  является левым сопряженным к  $U^T$  и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто  $T$ .
- ▶ Доказательство: упражнение.

## Монадичность сопряжения

- ▶ Пусть  $F \dashv U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  – сопряжение, а  $T = U \circ F$  – соответствующая ему монада.
- ▶ Тогда существует уникальный функтор  $K : \mathbf{D} \rightarrow T\text{-alg}$ , такой что  $U^T \circ K = U$  и  $K \circ F = F^T$ .
- ▶ Это утверждение доказывается не очень сложно, но мы не будем этого делать.
- ▶ Если функтор  $K$  является эквивалентностью категорий, то говорят, что сопряжение *монадично* (еще говорят, что  $U$  монадичен, и, что  $\mathbf{D}$  монадично над  $\mathbf{C}$ ).
- ▶ Если  $K$  является изоморфизмом, то говорят, что сопряжение *строго монадично*.
- ▶ Как уже отмечалось ранее алгебраические категории монадичны над **Set**.

# План лекции

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

Определение

Свойства категории моделей

Связь с монадами



## Определение

- ▶ Пусть  $(T, \eta, \mu)$  – монада над  $\mathbf{C}$ . Тогда категория Клейсли  $\mathbf{Kl}_T$  определяется следующим образом.
- ▶ Объекты  $\mathbf{Kl}_T$  – это объекты  $\mathbf{C}$ .
- ▶ Морфизмы  $\mathbf{Kl}_T$  из  $A$  в  $B$  – это морфизмы в  $\mathbf{C}$  из  $A$  в  $T(B)$ .
- ▶ Тожественный морфизм –  $\eta_A$ , композиция морфизмов  $f : A \rightarrow T(B)$  и  $g : B \rightarrow T(C)$  –  $\mu_C \circ T(g) \circ f$ .

## Свойства

- ▶ Категория Клейсли эквивалентна полной подкатегории  $T\text{-alg}$  на свободных  $T$ -алгебрах. То есть алгебрах вида  $(T(A), \mu_A)$ .
- ▶ Доказательство: упражнение.
- ▶ Существует функтор  $F_T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Kl}_T$ ,  $F_T(A) = A$ ,  
 $F_T(f : A \rightarrow B) = \eta_B \circ f$ .
- ▶ Существует функтор  $U_T : \mathbf{Kl}_T \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $U_T(A) = T(A)$ ,  
 $U_T(f : A \rightarrow T(B)) = \mu_B \circ T(f)$ .
- ▶ Функтор  $F_T$  является левым сопряженным к  $U_T$ , монада  $U_T \circ F_T$  – это просто  $T$ .

## Свойства

- ▶ Пусть  $F \dashv U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  – некоторое сопряжение, и  $T$  – соответствующая ему монада.
- ▶ Тогда существует уникальный функтор  $L : \mathbf{Kl}_T \rightarrow \mathbf{D}$ , такой что  $U \circ L = U_T$  и  $L \circ F_T = F$ .
- ▶ Таким образом, категория Клейсли является начальным объектом в некоторой категории сопряжений (мы ее не определяли), а категория алгебр является терминальным объектом в этой категории.

# План лекции

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

- Определение

- Свойства категории моделей

- Связь с монадами



# Теория

Алгебраическая теория  $T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$  состоит из следующего набора данных:

- ▶ Множество сортов  $\mathcal{S}$ .
- ▶ Множество функциональных символов  $\mathcal{F}$ , где для каждого символа указана его сигнатура:

$$\sigma : s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s$$

- ▶ Множество аксиом  $\mathcal{A}$ , где каждая аксиома – это выражение вида  $t_1 = t_2$ , где  $t_1, t_2$  – термы, составленные из функциональных символов теории и переменных.



## Примеры теорий

- ▶ Теории (коммутативных) моноидов, (абелевых) групп и (коммутативных) колец (с единицей) являются примерами алгебраических теорий с одним сортом.
- ▶ Теория коммутативных колец и модулей над ними является примером алгебраической теории с двумя сортами.
- ▶ Теория полей не алгебраична.
- ▶ Теория графов состоит из двух сортов  $V$  и  $E$  и двух функциональных символов  $d, c : E \rightarrow V$ .
- ▶ Теория множеств состоит из одного сорта и не содержит никаких символов и аксиом.
- ▶ Тривиальная теория состоит из одного сорта и одной аксиомы  $x = y$ .



## Модели теории

- ▶ Модель  $M$  теории  $T$  – это коллекция множеств  $\{M_s\}_{s \in S}$  вместе с функциями  $M(\sigma) : M_{s_1} \times \dots \times M_{s_k} \rightarrow M_s$  для каждого функционального символа  $\sigma : s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s$ , удовлетворяющая аксиомам.
- ▶ Морфизм  $f$  моделей  $M$  и  $N$  – это коллекция функций  $\{f_s\}_{s \in S}$ , такая что для всех  $\sigma : s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s$  и всех  $a_1 \in M_{s_1}, \dots, a_k \in M_{s_k}$  верно, что  $f_s(M(\sigma)(a_1, \dots, a_k)) = N(\sigma)(f_{s_1}(a_1), \dots, f_{s_k}(a_k))$ .
- ▶ У нас есть тождественный морфизм и композиция морфизмов, удовлетворяющие необходимым свойствам.
- ▶ Следовательно, существует категория моделей теории  $T$ , которую мы будем обозначать  **$T\text{-Mod}$** .



## Примеры моделей

- ▶ Категории моделей теорий (коммутативных) моноидов, (абелевых) групп и (коммутативных) колец (с единицей) являются категориями соответствующих алгебраических структур.
- ▶ Категория моделей теории графов эквивалентна категории графов.
- ▶ Категория теории множеств – это **Set**.
- ▶ Категория моделей тривиальной теории тривиальна, то есть эквивалентна дискретной категории на одном объекте.





## Функторы

- ▶ Пусть  $\mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$  – категория  $\mathcal{S}$ -индексированных множеств.
- ▶ Забывающий функтор  $U : T\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$  является строгим и правым сопряженным.
- ▶ Левый сопряженный  $F : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \rightarrow T\text{-Mod}$  к нему для каждого  $\mathcal{S}$ -индексированного множества  $X$  возвращает свободную модель на  $X$ .
- ▶ Другими словами,  $F(X)$  определяется как множество термов теории  $T$  с переменными в  $X$  с точностью до эквивалентности, определяемой аксиомами.
- ▶ Единица сопряжения  $\eta_X : X \rightarrow UF(X)$  каждому  $x \in X$  сопоставляет терм из одной переменной  $x$ .
- ▶ Коединица сопряжения  $\epsilon_M : FU(M) \rightarrow M$  каждому терму сопоставляет элемент модели  $M$ , который задается этим термом.



## Пределы и копределы

- ▶ Категория моделей любой алгебраической теории полна,  $U$  сохраняет пределы.
- ▶ Все операции определены поточечно.
- ▶ Категория моделей любой алгебраической теории кополна.
- ▶ Коуравнитель  $f, g : M \rightarrow N$  можно определить как  $UFU(N)$  с точностью до отношения эквивалентности, которое порождается отношениями  $f(x) \sim g(x)$  для всех  $x \in M$ .
- ▶ Копроизведение  $\coprod_{i \in I} M_i$  определяется как  $UF(\coprod_{i \in I} U(M_i))$  с точностью до отношения эквивалентности, которое порождается отношениями  $\sigma(a_1, \dots, a_k) \sim M_i(\sigma)(a_1, \dots, a_k)$  для всех символов  $\sigma$  и всех  $a_1, \dots, a_k \in M_i$ .



## От теорий к монадам

- ▶ Любая алгебраическая теория  $T$  определяет монаду на  $\mathbf{Set}^S$  – монаду, соответствующую сопряжению  $F \dashv U$ .
- ▶ Категория моделей  $T$  эквивалентна категории алгебр над  $U \circ F$ .
- ▶ Действительно, алгебра над  $U \circ F$  – это просто  $S$ -индексированное множество вместе с функцией интерпретирующей термы теории  $T$ .
- ▶ Любую модель теории можно достроить до интерпретации всех теормов теории.
- ▶ В частности у нас есть интерпретация всех функциональных символов  $\sigma(x_1, \dots, x_k)$ .
- ▶ В этой интерпретации выполняются аксиомы, так как термы рассматриваются с точностью до эквивалентности, порождаемой аксиомами.



## От монад к теориям

- ▶ Любой монаде  $T : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$  можно сопоставить алгебраическую теорию с множеством сортов  $\mathcal{S}$ .
- ▶ Множество функциональных символов с сигнатурой  $s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s$  мы определим как  $T(\{x_1 : s_1, \dots, x_k : s_k\})_s$ .
- ▶ Аксиомы теории:

$$\eta_{\{x:s\}}(x) = x$$

$$\text{bind}(t, x_i \mapsto t_i) = t(t_1, \dots, t_k)$$

для всех  $t \in T(\{x_1 : s_1, \dots, x_k : s_k\})_s$  и  $t_1 \in T(X)_{s_1}, \dots, t_k \in T(X)_{s_k}$ , где  $\text{bind}(t, f) = \mu_X(T(f))(t)$ .



## Финитарные монады

- ▶ В общем случае категория моделей теории, которую мы построили по монаде, не будет эквивалентна категории алгебр над этой монадой.
- ▶ Действительно, мы в определении применяли  $T$  только к конечным множествам.
- ▶ Если монада финитарна, то это будет верно, то есть финитарные монады – это примерно то же самое, что и алгебраические теории.
- ▶ Интуитивно монада финитарна, если ее значения на бесконечных множествах однозначно определяется ее значением на конечных.



## Направленные копределы

- ▶ Частично упорядоченное множество называется *направленным*, если любое его конечное подмножество имеет верхнюю границу (не обязательно точную!).
- ▶ Диаграмма в некоторой категории называется *направленной*, если она индексирована направленным множеством.
- ▶ Копредел называется *направленным*, если он является копределом направленной диаграммы.
- ▶ Монада называется *финитарной*, если она сохраняет направленные копределы.



## Примеры направленных копределов

- ▶ Любая полурешетка является направленным множеством.
- ▶ В частности множество конечных подмножеств любого множества является направленным.
- ▶ Любое множество является копределом своих конечных подмножеств, индексированных этим множеством.