

## Домашнее задание 2. Перечислительная комбинаторика.

Баллов на зачёт: 9

1. (1 балл) Сколько чисел в диапазоне от 0 до 999 999 не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?
2. (1 балл) В алфавите племени Бум-Бум всего шесть букв. Любое слово состоит у них из шести символов, причем в каждом таком слове должны быть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько всего слов в языке племени Бум-Бум?
3. (1,5 балла) Сколькими способами из доски  $7 \times 7$  можно выбрать 4 клетки, являющиеся вершинами некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски?
4. (1 балл) Переплётчик должен переплести 12 различных книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?
5. (1 балл) На доску размерами  $9 \times 9$  поставили 15 одинаковых шашек. Сколько существует вариантов такой расстановки? А сколько из них не являются центрально-симметричными (центрально-симметричная конфигурация — такая, при которой для любой шашки, стоящей в клетке с координатами  $(i, j)$ , соответствует шашка, расположенная симметрично относительно центральной клетке доски)?
6. (1,5 балла) Докажите комбинаторно следующее тождество:

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{k-i}.$$

7. (1,5 балла) С помощью правила суммы докажите тождество

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (n-i) = \binom{n+1}{3}.$$

8. (1,5 балла) Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины  $n$ , содержащих ровно  $k$  единиц? А бинарных строк длины  $n$ , содержащих  $k$  единиц и таких, в которых никакие две единицы не стоят рядом?
9. (1,5 балла) Придумайте и докажите комбинаторно рекуррентное соотношение для количества  $k$ -сочетаний с повторениями.
10. (2 балла) Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?