

# 1 Практика

## 1.1 Конечные автоматы

1.  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ содержит подстроку } 01\}$ . (Разобрано на занятии 1)

2. Два DFA:

- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ начинается на } 01\}$ .
- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ оканчивается на } 01\}$ .

(Разобрано на занятии 1)

3.  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{если в строке более одного символа, предпоследний равен } 1\}$ . (Разобрано на занятии 3)

4.  $\{w \in \{0, 1, 2\}^* \mid \text{сумма цифр делится на } 3\}$ . (Разобрано на занятии 1)

5. Покажите, что  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  не распознаётся никаким DFA. (Разобрано на занятии 1)

6.  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{на каждой чётной позиции стоит } 1\}$ . Индексация с единицы. Например, распознаётся строка  $0\bar{1}1\bar{1}0\bar{1}0\bar{1}$ . (Разобрано на занятии 2)

7. Язык, состоящий из слов чётной длины, начинающихся с 1, и слов нечётной длины, начинающихся с 0. (Разобрано на занятии 3)

8. Язык, состоящий из слов  $\{0, 1\}^*$ , в последних пяти символах которых хотя бы два раза встречался 0. (Разобрано на занятии 3)

9. Сначала несколько определений:

**Определение** (Отделимые слова). Будем говорить, что язык  $L$  отделяет слова  $s_1$  и  $s_2$ , если существует такое слово  $t$ , что одно из слов  $s_1 t$  и  $s_2 t$  принадлежит  $L$ , а другое — нет. Для неотделимых  $L$  слов будем писать, что  $s_1 \equiv_L s_2$ .

**Определение** (Индекс языка). Индексом  $L$  назовём супремум размеров множеств, в которых все строки попарно отделимы языком  $L$  (если все такие множества конечные, то индекс — это размер наибольшего; иначе индекс бесконечный).

Само задание:

- Найдите для языка из первой задачи какое-нибудь наибольшего размера множество попарно разделимых им строк.
- Найдите индекс языка из первой задачи.

(Разобрано на занятии 2)

10. Найдите индекс языка из задачи №4 из домашнего задания. (Разобрано на занятии 2)

11. Регулярный ли язык  $P(L) = \{w \mid \text{все префиксы } w \text{ входят в язык } L\}$ , если  $L$  регулярный? (Разобрано на занятии 3)

12. Регулярный ли язык  $L^2 = \{ww \mid w \in L\}$ , если  $L$  регулярный? (Разобрано на занятии 3)

13. Если  $L$  регулярный, то регулярный ли язык  $\{w \mid \text{число префиксов } w, \text{ входящих в } L, \text{ чётно}\}$ ? (Разобрано на занятии 3)

14. Важные определения:

**Определение** (Недетерминированный конечный автомат). Недетерминированный конечный автомат (сокращённо “NFA” или “НКА”) — это набор вида  $(\Sigma, Q, Q_0, \Delta, T)$  такой, что

- $\Sigma, Q, T$  определены как в DFA;
- $Q_0 \subseteq Q$  — подмножество состояний, называемое начальными;
- $\Delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$  — функция, которая осуществляет переход из состояния в какое-то множество состояний по символу или по пустой строке.

NFA  $A$  принимает язык  $L$ , если  $A$  заканчивает хотя бы одно из вычислений на любом входе  $w \in L$  в состоянии из  $T$ . Формально:

$$L(A) = \{w = a_1 \cdots a_n \mid a_1, \dots, a_n \in \Sigma, \exists r_0, \dots, r_n \in Q : r_0 \in Q_0, r_i \in \Delta(r_{i-1}, a_i), r_n \in T\}$$

**Определение** (co-NFA). co-NFA — это автомат, который устроен точно так же, как NFA, но принимает слово  $w$ , только если *каждое* вычисление на входе  $x$  в состоянии из  $T$ .

**Определение** ( $\varepsilon$ -NFA).  $\varepsilon$ -НКА — НКА, в котором переходы могут быть не только по символам, но и по пустым строкам.

**Факт.** Язык, принимаемый  $\varepsilon$ -НКА, принимается и НКА. (Лекция; вкратце: когда кто-то переходит в состояние  $q$ , из которого по пустой строке можно попасть в состояния  $E$ , то переход происходит и в  $E$ ).

**Факт.** Язык, принимаемый НКА, принимается и ДКА. (Лекция; вкратце: построим новый ДКА, множество состояний которого —  $2^Q$ , а дальше всё само получается).

Приведите DFA и NFA для языка слов, распознаваемых регулярным выражением  $a^*b^*c^*$ . (Разобрано на занятии 4)

15. Покажите, что язык слов над  $\{a, b, c\}$ , в которых последний символ уже встречался до этого, распознаётся DFA. (Разобрано на занятии 4)
16. Покажите, что язык слов над  $\{a, b, c\}$ , в которых последний символ ещё не встречался, распознаётся DFA. (Разобрано на занятии 4)
17. Постройте NFA для языка слов, описываемых регулярным выражением  $((01)^* | (010)^*)$ . (Разобрано на занятии 4)
18. Напишите в автоматном стиле программу на Си, которая печатает первое слово из каждой поданной на вход строки. (Разобрано на занятии 5)
19. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом  $\{0, 1\}$ , не содержащих смежных единиц. (Разобрано на занятии 6)
20. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом  $\{0, 1\}$ , содержащих ровно одну пару смежных единиц.
21. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом  $\{0, 1\}$ , содержащих либо ни одной пары смежных единиц, либо одну.
22. Нарисуйте NFA для языка  $(0+1)01$ .
23. Нарисуйте NFA для языка  $00(0+1)^*$ .
24. Приведите регулярное выражение для языка троичных чисел, сумма разрядов которых делится на три.
25. Приведите регулярное выражение для языка двоичных чисел, кратных пяти.

## 2 Домашнее задание

### 2.1 Конечные автоматы

1.  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ не содержит подстроку } 01\}$ . (1.5 б.) (Разобрано на занятии 2)
2. Покажите, что язык  $L$  распознаётся DFA тогда и только тогда, когда  $\bar{L}$  распознаётся DFA, где  $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ . (2 б.) (Разобрано на занятии 2)
3. Докажите, что любой конечный язык (иными словами, конечное множество слов) распознаётся DFA. (2.5 б.) (Разобрано на занятии 2)
4.  $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0, m \equiv n \pmod{3}\}$ . (2.5 б.) (Разобрано на занятии 2)
5.  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ делится на } 5 \text{ как двоичное число}\}$ . (3.25 б.) (Разобрано на занятии 3)
6. Правда ли, что если  $L$  и  $M$  распознаются DFA, то  $L \cap M$  обязательно тоже? Обоснуйте. (3.25 б.) (Разобрано на занятии 2)
7. Правда ли, что если  $L \cap M$  распознаётся DFA, то  $L$  и  $M$  обязательно тоже? Обоснуйте. (2 б.) (Разобрано на занятии 3)
8. Покажите, что невозможно распознать DFA язык  $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$ . (2 б.) (Разобрано на занятии 2)
9. Покажите, что невозможно распознать DFA язык  $\{a^n b^m \mid m, n \geq 0, \gcd(m, n) > 1\}$ . (2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)
10. Покажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции  $\sqrt{L} = \{m \mid mm \in L\}$ . (3 б.) (Разобрано на занятии 3)
11. Покажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции  $L^R = \{m^R \mid m \in L\}$ , где  $(a_1 a_2 \dots a_n)^R = a_n a_{n-1} \dots a_1$ . (1.75 б.) (Разобрано на занятии 5)
12. Докажите, что язык  $L$  распознаётся неким DFA тогда и только тогда, когда индекс  $L$  конечен. (2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)
13. Докажите, что индекс языка  $L$  равен минимальному размеру распознающего  $L$  автомата. (2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)
14. Всегда ли, когда  $L$  распознаётся DFA, распознаётся и  $L/L' = \{u \mid \exists v : uv \in L, v \in L'\}$ , где  $L' \subseteq \Sigma^*$  — произвольный язык над тем же алфавитом? (3 б.) (Разобрано на занятии 3)
15. Всегда ли, когда  $L$  распознаётся DFA, распознаётся и  $\text{PERMUTE}(L) = \{a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n} \mid n \geq 0, (k_1 k_2 \dots k_n) \text{ — некоторая перестановка, } a_i \in \Sigma, a_1 a_2 \dots a_n \in L\}$ ? (2.75 б.) (Разобрано на занятии 4)
16. Всегда ли, когда  $L$  распознаётся DFA, распознаётся и  $\text{SUBSEQ}(L) = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma, \exists u_0, \dots, u_n \in \Sigma^* : u_0 a_1 u_1 a_2 u_2 \dots a_n u_n \in L\}$ ? (2.5 б.) (Разобрано на занятии 6)
17. Всегда ли, когда  $L$  распознаётся DFA, распознаётся и  $\frac{1}{2}L = \{u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L\}$ ? (2.5 б.) (Разобрано на занятии 4)
18. Всегда ли, когда  $L$  распознаётся DFA, распознаётся и  $\text{SHIFT}(L) = \bigcup_{k \geq 0} \{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n a_1 a_2 \dots a_k \mid a_1 a_2 \dots a_n \in L\}$ ? (3 б.) (Разобрано на занятии 4)

19. Приведите такой пример множества  $A \subseteq \mathbb{N}$ , что язык чисел из  $A$ , представленных в двоичной системе, распознаётся DFA, а язык тех же чисел, представленных в троичной, — нет. (3.5 б.) (Разобрано на занятии 4)
20. Всегда ли, когда  $L$  распознаётся DFA, распознаётся и  $h(L) = \{h(x) \mid x \in L\}$ , где  $L \subseteq \Sigma^*$  и  $h$  — некий гомоморфизм на  $\Sigma^*$ ? (3 б.) (Разобрано на занятии 5)
21. Всегда ли, когда  $L$  распознаётся DFA, распознаётся и  $h(L) = \{y \mid h(y) \in L\}$ , где  $L \subseteq \Sigma^*$  и  $h$  — некий гомоморфизм на  $\Sigma^*$ ? (3.25 б.) (Разобрано на занятии 5)
22. Докажите, что нельзя распознать DFA язык  $\{0^n \mid n \text{ — полный квадрат}\}$ . (2.25 б.) (Разобрано на занятии 4)
23. Покажите, что если детерминированный автомат имеет  $k$  состояний и синхронизируется какой-то строкой, то он синхронизируется и строкой длины не более  $k^3$ .

**Определение** (Синхронизация строкой). Автомат синхронизируется строкой  $s$ , если  $\forall q_1, q_2 \in Q : \delta(q_1, s) = \delta(q_2, s)$ .

(Разобрано на занятии 6)

24. Покажите, что класс языков, распознающихся co-NFA, совпадает с классом языков, распознающихся NFA. (Разобрано на занятии 6)
25. Существует ли такое семейство языков  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , что  $E_n$  распознаётся NFA с  $n$  состояниями, но требует DFA размером как минимум  $c^n$  для некоторого  $c > 1$ ? (Разобрано на занятии 6)
26. Покажите, что не распознаётся DFA язык  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ — двоичное представление простого числа}\}$ .
27. Приведите алгоритм, который по данному DFA  $A$  вычисляет количество распознаваемых им слов длины  $n$  за  $O(\text{poly}(|Q_A| \cdot n))$ , где  $\text{poly}(x)$  — некая полиномиальная функция. (Разобрано на занятии 6)
28. Решите предыдущую задачу за  $O(\text{poly}(|Q_A|) \cdot \log(n))$ .
29. Будем говорить, что  $L_1 \ll L_2$ , если  $L_1 \subset L_2$  и  $|L_2 \setminus L_1| = \infty$ . Докажите, что если  $L_1$  и  $L_2$  распознаются DFA и  $L_1 \ll L_2$ , то существует такой распознаваемый DFA язык  $L_3$ , что  $L_1 \ll L_3 \ll L_2$ .
30. Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — DFA, имеющие  $k_1$  и  $k_2$  состояний соответственно, и пусть  $U = L(M_1) \cup L(M_2)$ , где  $L(A)$  — язык, распознаваемый автоматом  $A$ . Пусть  $U \neq \emptyset$  и  $U \neq \Sigma^*$ . Докажите, что  $U$  содержит некоторую строку  $s_1$  длины не более  $\max(k_1, k_2)$  и что существует не принадлежащая  $U$  строка  $s_2$  длины не более  $k_1 k_2$ .
31. Приведите регулярное выражение для языка слов из 0 и 1, в которых каждая пара смежных 0 находится перед парой смежных 1.
32. Приведите регулярное выражение для языка слов из 0 и 1, в которых число символов 0 делится на 3, а число символов 1 чётно.