

Числа Стирлинга, числа Белла, ДЗ

1. Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375.
2. Докажите, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$, а) [1 балл] по индукции
б) [2 балла] придумав инъекцию из разбиений множества на подмножества в перестановки.
3. Докажите комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n, 3)$:

$$S(n, 3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

4. Докажите, что числа Стирлинга $S(n, n - 2)$ рассчитываются по формуле

$$S(n, n - 2) = \frac{n(n - 1)(n - 2)(3n - 5)}{24}.$$

5. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n -множества без блоков единичной длины. Найдите рекуррентную формулу для $F(n)$, по аналогии с числами Белла.
6. Докажите утверждение

$$\hat{S}(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n.$$

с помощью формулы включения-исключения

$$\left| \bigcap_{i=0}^n \bar{A}_i \right| = |X| - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

7. [2 балла] Докажите, что количество разбиений n -элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n - 1)$.