1 Практика

1.1 Конечные автоматы

1. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ содержит подстроку $01\}$. *(Разобрано на занятии 1)*

2. Два DFA:

   - $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ начинается на $01\}$.
   - $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ оканчивается на $01\}$.

   (Разобрано на занятии 1)

3. $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ если в строке более одного символа, предпоследний равен $1\}$. *(Разобрано на занятии 3)*

4. $\{w \in \{0,1,2\}^* \mid$ сумма цифр делится на $3\}$. *(Разобрано на занятии 1)*

5. Покажите, что $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ не распознаётся никаким DFA. *(Разобрано на занятии 1)*

6. $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ на каждой чётной позиции стоит $1\}$. Индексация с единицы. Например, распознаётся строка $0\bar{1}1\bar{1}0\bar{1}0\bar{1}$. *(Разобрано на занятии 2)*

7. Язык, состоящий из слов чётной длины, начинаюшихся с 1, и слов нечётной длины, начинаюшихся с 0. *(Разобрано на занятии 3)*

8. Язык, состоящий из слов $\{0,1\}^*$, в последних пяти символах которых хотя бы два раза встречался 0. *(Разобрано на занятии 3)*

9. Сначала несколько определений:

   Определение (Отделимые слова)**.** Будем говорить, что язык L отделяет слова s_1 и s_2, если существует такое слово t, что одно из слов s_1t и s_2t принадлежит L, а другое — нет. Для неотделимых L слов будем писать, что $s_1 \equiv_L s_2$.

   Определение (Индекс языка)**.** Индексом L назовём супремум размеров множеств, в которых все строки попарно отделимы языком L (если все такие множества конечные, то индекс — это размер наибольшего; иначе индекс бесконечный).

   Само задание:

   - Найдите для языка из первой задачи какое-нибудь наибольшего размера множество попарно разделимых им строк.
   - Найдите индекс языка из первой задачи.

   (Разобрано на занятии 2)

10. Найдите индекс языка из задачи №4 из домашнего задания. *(Разобрано на занятии 2)*

11. Регулярный ли язык $P(L) = \{w \mid$ все префиксы w входят в язык $L\}$, если L регулярный? *(Разобрано на занятии 3)*

12. Регулярный ли язык $L^2 = \{ww \mid w \in L\}$, если L регулярный? *(Разобрано на занятии 3)*

13. Если L регулярный, то регулярный ли язык $\{w \mid$ число префиксов w, входящих в L, чётно$\}$? *(Разобрано на занятии 3)*

14. Важные определения:

Определение (Недетерминированный конечный автомат)**.** Недетерминированный конечный автомат (сокращённо “NFA” или “НКА”) — это набор вида $(\Sigma, Q, Q_0, \Delta, T)$ такой, что

- Σ, Q, T определены как в DFA;
- $Q_0 \subseteq Q$ — *подмножество* состояний, называемое начальными;
- $\Delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ — функция, которая осуществляет переход из состояния в какое-то *множество* состояний по символу *или по пустой строке.*

NFA A принимает язык L, если A заканчивает хотя бы одно из вычислений на любом входе $w \in L$ в состоянии из T. Формально:

$$L(A) = \{w = a_1 \cdots a_n \mid a_1, \cdots, a_n \in \Sigma, \exists r_0, \cdots, r_n \in Q : r_0 \in Q_0, r_i \in \Delta(r_{i-1}, a_i), r_n \in T\}$$

Определение (co-NFA)**.** co-NFA — это автомат, который устроен точно так же, как NFA, но принимает слово w, только если *каждое* вычисление на входе x в состоянии из T.

Определение (ε-NFA)**.** ε-НКА — НКА, в котором переходы могут быть не только по символам, но и по пустым строкам.

Факт. *Язык, принимаемый ε-НКА, принимается и НКА. (Лекция; вкратце: когда кто-то переходит в состояние q, из которого по пустой строке можно попасть в состояния E, то переход происходит и в E).*

Факт. *Язык, принимаемый НКА, принимается и ДКА. (Лекция; вкратце: построим новый ДКА, множество состояний которого — 2^Q, а дальше всё само получается).*

Приведите DFA и NFA для языка слов, распознаваемых регулярным выражением `a*b*c*`. *(Разобрано на занятии 4)*

15. Покажите, что язык слов над $\{a, b, c\}$, в которых последний символ уже встречался до этого, распознаётся DFA. *(Разобрано на занятии 4)*

16. Покажите, что язык слов над $\{a, b, c\}$, в которых последний символ ещё не встречался, распознаётся DFA. *(Разобрано на занятии 4)*

17. Постройте NFA для языка слов, описываемых регулярным выражением `((01)*|(010)*)`. *(Разобрано на занятии 4)*

18. Напишите в автоматном стиле программу на Си, которая печатает первое слово из каждой поданной на вход строки. *(Разобрано на занятии 5)*

19. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом $\{0, 1\}$, не содержащих смежных единиц. *(Разобрано на занятии 6)*

20. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом $\{0, 1\}$, содержащих ровно одну пару смежных единиц. *(Не разобрано и не будет)*

21. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом $\{0, 1\}$, содержащих либо ни одной пары смежных единиц, либо одну. *(Не разобрано и не будет)*

22. Нарисуйте NFA для языка `(0+1)01`. *(Не разобрано и не будет)*

23. Нарисуйте NFA для языка `00(0+1)*`. *(Не разобрано и не будет)*

24. Приведите регулярное выражение для языка троичных чисел, сумма разрядов которых делится на три. *(Не разобрано и не будет)*

25. Приведите регулярное выражение для языка двоичных чисел, кратных пяти. *(Не разобрано и не будет)*

1.2 Контекстно-свободные языки

26. Определение:

    Определение (Контекстно-свободная грамматика)**.** Контекстно-свободная грамматика (КС-грамматика, context-free grammar, cf-grammar) G — это четвёрка (Σ, N, R, S) такая, что:

    - Σ — конечный алфавит; его элементы назовём *терминальными символами*, или *терминалами*.
    - N — некоторое конечное множество, причём $N \cap \Sigma = \emptyset$. Его элементы назовём *нетерминальными символами*, или *нетерминалами*.
    - $S \in N$ — стартовый символ.
    - R — конечное множество правил вывода вида $A \to \alpha, A \in N, \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$; иными словами, R — конечное подмножество $2^{N \times (N \cup \Sigma)^*}$.

    Говорим, что язык $L(G)$ — это язык, *распознаваемый* (*генерируемый*) грамматикой G, множество строк из Σ^*, которые можно вывести из S по правилам вывода из R.

    Зададим грамматику с $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S\}$ и следующим R:

    - $S \to aSb$
    - $S \to SS$
    - $S \to \varepsilon$

    (Можно записать R иначе: $\{S \to aSb \mid SS \mid \varepsilon\}$).

    Объясните, что за язык эта грамматика распознаёт и почему. *(Разобрано на занятии 7)*

27. Приведите грамматику для языка всех слов нечётной длины над алфавитом $\{a, b\}$. *(Разобрано на занятии 7)*

28. Приведите грамматику для языка $\{a^i b^j \mid i \geq j\}$. *(Разобрано на занятии 7)*

29. Приведите грамматику для языка $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j\}$. *(Разобрано на занятии 7)*

30. Приведите грамматику для языка $\{a^i b^j c^k \mid i \neq k\}$. *(Разобрано на занятии 7)*

31. Приведите грамматику для языка $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee i \neq k\}$. *(Разобрано на занятии 7)*

32. Опишите, что распознаёт грамматика $S \to aSa \mid aa \mid a$, и докажите это в обе стороны по индукции. *(Разобрано на занятии 8)*

33. Опишите, что распознаёт грамматика $S \to aSa \mid aTb \mid bTa \mid bTb$, $T \to aT \mid bT \mid \varepsilon$, и докажите это в обе стороны по индукции. *(Разобрано на занятии 8)*

34. Приведите грамматику для языка `0*1(0+1)*`. Напишите левосторонний и правосторонний вывод в ней для строк `00101`, `1001`, `00011`.

35. Дан алфавит $\{0, 1, (,), +, *, \emptyset, \epsilon\}$. Приведите грамматику языка регулярных выражений.

36. Приведите грамматику для языка $\{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w_a| = 2 \cdot |w_b|\}$. *(Разобрано на занятии 9)*

37. Покажите, что грамматика $S \to aS \mid aSbS \mid \varepsilon$ неоднозначная.

38. Докажите, что грамматика из задания (37) распознаёт ровно те строки, в каждом префиксе которых количество a не меньше количества b, то есть ровно $\mathrm{PREFIX}(L)$, где L — язык правильных скобочных последовательностей.

39. Опишите, какие строки обладают ровно одним деревом разбора в грамматике, определённой в задании (37).

40. Является ли неоднозначной грамматика $S \to SaS \mid a \mid b$? Почему?

41. Уберите ε-продукции, цепные продукции и бесполезные символы, а затем приведите к нормальной форме Хомского грамматику $S \to aAa \mid bBB \mid \varepsilon, A \to C, B \to S \mid A, C \to S \mid \varepsilon$. S — стартовый символ. *(Разобрано на занятии 10)*

42. Приведите к нормальной форме Хомского грамматику $S \to aAA \mid bBB \mid \varepsilon, A \to AC \mid a, B \to CB \mid bb, C \to CDE \mid \varepsilon, D \to A \mid B \mid ab$. S — стартовый символ.

43. Полезная лемма:

    Определение (Лемма о накачке для КС-языков)**.** Для каждого КС-языка $L \subseteq \Sigma^*$ существует такая константа $p \geq 1$, что для любой строки $w \in L$, для которой $|w| > p$, существует разложение $w = xuyvz$, где $|uv| > 0$ и $|uyv| \leq p$, для которого $xu^iyv^iz \in L$ при всех $i \geq 0$.

    Докажите, что не может быть контекстно-свободным язык $L = \{ww^Rw\}$ над алфавитом из более чем одного символа. *(Разобрано на занятии 10)*

44. Докажите, что не может быть контекстно-свободным язык $L = \{a^nb^nc^i \mid i \leq n\}$.

2 Домашнее задание

2.1 Конечные автоматы

1. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ не содержит подстроку $01\}$. *(1.5 б.) (Разобрано на занятии 2)*

2. Покажите, что язык L распознаётся DFA тогда и только тогда, когда $\bar{L}$ распознаётся DFA, где $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$. *(2 б.) (Разобрано на занятии 2)*

3. Докажите, что любой конечный язык (иными словами, конечное множество слов) распознаётся DFA. *(2.5 б.) (Разобрано на занятии 2)*

4. $\{a^mb^n \mid m,n \geq 0, m \equiv n \pmod 3\}$. *(2.5 б.) (Разобрано на занятии 2)*

5. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ делится на 5 как двоичное число$\}$. *(3.25 б.) (Разобрано на занятии 3)*

6. Правда ли, что если L и M распознаются DFA, то $L \cap M$ обязательно тоже? Обоснуйте. *(3.25 б.) (Разобрано на занятии 2)*

7. Правда ли, что если $L \cap M$ распознаётся DFA, то L и M обязательно тоже? Обоснуйте. *(2 б.) (Разобрано на занятии 3)*

8. Покажите, что невозможно распознать DFA язык $\{a^nb^m \mid n \neq m\}$. *(2 б.) (Разобрано на занятии 2)*

9. Покажите, что невозможно распознать DFA язык $\{a^nb^m \mid m,n \geq 0, \gcd(m,n) > 1\}$. *(2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)*

10. Покажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции $\sqrt{L} = \{m \mid mm \in L\}$. *(3 б.) (Разобрано на занятии 3)*

11. Покажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции $L^R = \{m^R \mid m \in L\}$, где $(a_1a_2\cdots a_n)^R = a_na_{n-1}\cdots a_1$. *(1.75 б.) (Разобрано на занятии 5)*

12. Докажите, что язык L распознаётся неким DFA тогда и только тогда, когда индекс L конечен. *(2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)*

13. Докажите, что индекс языка L равен минимальному размеру распознающего L автомата. *(2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)*

14. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $L/L' = \{u \mid \exists v : uv \in L, v \in L'\}$, где $L' \subseteq \Sigma^*$ — произвольный язык над тем же алфавитом? *(3 б.) (Разобрано на занятии 3)*

15. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $\mathrm{PERMUTE}(L) = \{a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_n} \mid n \geq 0, (k_1k_2\cdots k_n)$ — некоторая перестановка, $a_i \in \Sigma, a_1a_2\cdots a_n \in L\}$? *(2.75 б.) (Разобрано на занятии 4)*

16. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $\mathrm{SUBSEQ}(L) = \{a_1a_2\cdots a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma, \exists u_0, \cdots, u_n \in \Sigma^* : u_0a_1u_1a_2u_2\cdots a_nu_n \in L\}$? *(2.5 б.) (Разобрано на занятии 6)*

17. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $\frac{1}{2}L = \{u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L\}$? *(2.5 б.) (Разобрано на занятии 4)*

18. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $\mathrm{SHIFT}(L) = \bigcup_{k\geq 0}\{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_na_1a_2\cdots a_k \mid a_1a_2\cdots a_n \in L\}$? *(3 б.) (Разобрано на занятии 4)*

19. Приведите такой пример множества $A \subseteq \mathbb{N}$, что язык чисел из A, представленных в двоичной системе, распознаётся DFA, а язык тех же чисел, представленных в троичной, — нет. *(3.5 б.) (Разобрано на занятии 4)*

20. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $h(L) = \{h(x) \mid x \in L\}$, где $L \subseteq \Sigma^*$ и h — некий гомоморфизм на Σ^*? *(3 б.) (Разобрано на занятии 5)*

21. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $h^{-1}(L) = \{y \mid h(y) \in L\}$, где $L \subseteq \Sigma^*$ и h — некий гомоморфизм на Σ^*? *(3.25 б.) (Разобрано на занятии 5)*

22. Докажите, что нельзя распознать DFA язык $\{0^n \mid n$ — полный квадрат$\}$. *(2.25 б.) (Разобрано на занятии 4)*

23. Покажите, что если детерминированный автомат имеет k состояний и синхронизируется какой-то строкой, то он синхронизируется и строкой длины не более k^3.

    Определение (Синхронизация строкой)**.** Автомат синхронизируется строкой s, если $\forall q_1, q_2 \in Q : \delta(q_1, s) = \delta(q_2, s)$.

    (Разобрано на занятии 6)

24. Покажите, что класс языков, распознающихся co-NFA, совпадает с классом языков, распознающихся NFA. *(Разобрано на занятии 6)*

25. Существует ли такое семейство языков $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что E_n распознаётся NFA с n состояниями, но требует DFA размером как минимум c^n для некоторого $c > 1$? *(Разобрано на занятии 6)*

26. Покажите, что не распознаётся DFA язык $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ — двоичное представление простого числа$\}$. *(Разобрано на занятии 7)*

27. Приведите алгоритм, который по данному DFA A вычисляет количество распознаваемых им слов длины n за $O(\mathrm{poly}(|Q_A| \cdot n))$, где $\mathrm{poly}(x)$ — некая полиномиальная функция. *(Разобрано на занятии 6)*

28. Решите предыдущую задачу за $O(\mathrm{poly}(|Q_A|) \cdot \log(n))$. *(Разобрано на занятии 9)*

29. Будем говорить, что $L_1 \ll L_2$, если $L_1 \subset L_2$ и $|L_2 \setminus L_1| = \infty$. Докажите, что если L_1 и L_2 распознаются DFA и $L_1 \ll L_2$, то существует такой распознаваемый DFA язык L_3, что $L_1 \ll L_3 \ll L_2$. *(Разобрано на занятии 7)*

30. Пусть M_1 и M_2 — DFA, имеющие k_1 и k_2 состояний соответственно, и пусть $U = L(M_1) \cup L(M_2)$, где $L(A)$ — язык, распознаваемый автоматом A. Пусть $U \neq \emptyset$ и $U \neq \Sigma^*$. Докажите, что U содержит некоторую строку s_1 длины не более $\max(k_1, k_2)$ и что существует не принадлежащая U строка s_2 длины не более $k_1 k_2$. *(Разобрано на занятии 7)*

31. Приведите регулярное выражение для языка слов из 0 и 1, в которых каждая пара смежных 0 находится перед парой смежных 1. *(Разобрано на занятии 7)*

32. Приведите регулярное выражение для языка слов из 0 и 1, в которых число символов 0 делится на 3, а число символов 1 чётно. *(Разобрано на занятии 7)*

33. Докажите, что замыкание Клини унарного языка (языка над алфавитом из одного символа) является регулярным языком. *(Разобрано на занятии 9)*

2.2 Контекстно-свободные грамматики

34. Покажите, что является контекстно-свободным язык $\{a^n b^{n+m} a^m \mid n, m \geq 0\}$. *(Разобрано на занятии 8)*

35. Покажите, что является контекстно-свободным язык $\{w \mid w \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w|_b\}$. *(Разобрано на занятии 8)*

36. Покажите, что является контекстно-свободным язык $\overline{L}$, где $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$. *(Разобрано на занятии 9)*

37. Покажите, что класс контекстно-свободных языков замкнут относительно объединения с контекстно-свободными и пересечения с регулярными языками. *(Разобрано на занятии 8)*

38. Покажите, что класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операции $\mathrm{SUFFIX}(L) = \{v \mid \exists u : uv \in L\}$. *(Разобрано на занятии 8)*

39. Покажите, что класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операции $h(L) = \{h(x) \mid x \in L\}$, где $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ — произвольный гомоморфизм. *(Разобрано на занятии 8)*

40. Покажите, что класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операции $\mathrm{SHIFT}(L)$. *(Разобрано на занятии 11)*

41. Покажите, что если L_1 и L_2 — регулярные языки, то $L_3 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2, |u| = |v|\}$ контекстно-свободный. *(Разобрано на занятии 9)*

42. Пусть $G = (\Sigma, N, R, S)$ — грамматика, в которой $|R| = p$ и длина правой части каждого правила не превосходит m. Пусть из $A \in N$ выводится пустая строка. Докажите, что тогда из A возможно вывести пустую строку за не более чем $\frac{m^p - 1}{m - 1}$ шагов. *(Разобрано на занятии 9)*

43. Докажите усиление леммы о накачке, утверждающее существование нужного разбиения, но с $|u| > 0$ и $|v| > 0$ разом. *(Разобрано на занятии 11)*

44. Дана лемма:

    Определение (Лемма Огдена)**.** Для каждого контекстно-свободного языка $L \subseteq \Sigma^*$ существует такая константа $p \geq 1$, что для любой строки $w \in L$, для которой $|w| \geq p$, и для любого множества P выделенных позиций в w, то есть $P \subseteq \{1, \cdots, |w|\}$, где $|P| \geq p$, существует разложение $w = xuyvz$, для которого

- uv содержит хотя бы одну выделенную позицию,
- uyv содержит не более p выделенных позиций,
- $xu^iyv^iz \in L$ для всех $i \geq 0$.

Докажите её. Подсказка: заметьте, что частный случай, где в качестве P взяты все позиции в строке, — это просто лемма о накачке. *(Разобрано на занятии 11)*

45. Докажите, что не является контекстно-свободным язык $\{a^m b^n c^n \mid m, n > 0, m \neq n\}$. *(Разобрано на занятии 11)*

46. Докажите, что не является контекстно-свободным язык $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$.

47. Докажите, что класс КС-языков *не* замкнут относительно пересечения. *(Разобрано на занятии 11)*

48. Докажите, что класс КС-языков *не* замкнут относительно дополнения.

49. Докажите, что класс КС-языков *не* замкнут относительно операции $\frac{1}{2}L = \{u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L\}$.

50. Докажите, что класс КС-языков *не* замкнут относительно операции $\text{SHUFFLE}(L_1, L_2) = \{a_1 b_1 \cdots a_n b_n \mid a_i, b_j \in \Sigma, a_1 \cdots a_n \in L_1, b_1 \cdots b_n \in L_2\}$.

51. Приведите пример регулярного языка $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ такого, что $\text{PERMUTE}(L)$ не является контекстно-свободным.

52. Докажите, что если $L \subseteq \{a, b\}^*$ — регулярный язык, то $\text{PERMUTE}(L)$ — контекстно-свободный.

53.

    Определение (Конъюнктивная грамматика)**.** Конъюнктивную грамматику можно представить как четвёрку $G = (\Sigma, N, R, S)$, где Σ — алфавит, N — множество нетерминальных символов, R — множество правил вывода, S — выделенный стартовый нетерминальный символ (тут всё как для КС-грамматик).

    Правила вывода имеют вид $A \to \alpha_1 \& \alpha_2 \& \cdots \& \alpha_n$, где $A \in N$ и $\alpha_i \in (\Sigma \cup N)^*$ (то есть каждый α_i — правило такого вида, какие были для КС-грамматик).

    Слово w можно разобрать по правилу $A \to \alpha_1 \& \alpha_2 \& \cdots \& \alpha_n$, если его можно разобрать по каждому α_i.

    Докажите, что $\{a^n b^n c^n\}$ распознаётся какой-то конъюнктивной грамматикой.

54. Докажите, что $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$ распознаётся какой-то конъюнктивной грамматикой.

3 Дополнительные задания

3.1 Регулярные языки

3.1.1 Формат сдачи

Для тех задач, где требуется программа, ответ нужно представить в виде программы на любом языке. Программа должна следовать указанному формату.

Формат описания конечного автомата Тестирующая система выдаёт и ожидает

- На первой строке два неотрицательных числа: k, количество букв в алфавите, и n, количество состояний в данном автомате.
- На второй строке через пробел представлено k символов — допустимых букв данного алфавита.
- На третьей строке дано единственное число $[0; n)$ — индекс начального состояния автомата.
- На четвёртой строке через пробел сначала дано число z, а затем перечислено z чисел $[0; n)$ — индексов терминальных состояний автомата.
- Следующие $n \cdot k$ строк содержат единственное число $[0; n)$. То, что на строке i содержится число j, означает, что из состояния $\lfloor i/k \rfloor \in [0; n)$ по символу с индексом $i \pmod k \in [0; k)$ осуществляется переход в состояние j.

Пример представления автомата, который распознаёт слова, начинающиеся со строки `01`, (комментарии представлены для наглядности, их тестирующая система писать не будет):

```
2 4 # 2 letters, 4 states
0 1 # Sigma = {0, 1}
0   # the initial state is 0
1 2 # there is one terminal state, 2
1   # 0 -0-> 1
3   # 0 -1-> 3
3   # 1 -0-> 3
2   # 1 -1-> 2
2   # 2 -0-> 2
2   # 2 -1-> 2
3   # 3 -0-> 3
3   # 3 -1-> 3
```

Формат описания недетерминированного конечного автомата

- На первой строке два неотрицательных числа: k, количество букв в алфавите, и n, количество состояний в данном автомате.
- На второй строке через пробел представлено k символов — допустимых букв данного алфавита.
- На третьей строке дано единственное число $[0; n)$ — индекс начального состояния автомата.
- На четвёртой строке через пробел сначала дано число z, а затем перечислено z чисел $[0; n)$ — индексов терминальных состояний автомата.
- Следующие $n \cdot (k+1)$ строк имеют следующий вид: сначала число a_i, а затем a_i чисел $[0; n)$ подряд. То, что на строке i записаны числа a_{ij}, означает, что из состояния $\lfloor i/(k+1) \rfloor \in [0; n)$ можно попасть во все состояния a_{ij} либо по символу r, где $r = (i \mod (k+1))$, если $r < k$, либо по пустой строке, если $r \equiv k \mod (k+1)$.

Формат описания регулярного выражения Регулярным выражениям соответствует два формата.

- Формат, который тестирующая система принимает на вход, — это обычные регулярные выражения. Регулярное выражение — это одна из следующих конструкций:
  - Символ алфавита.
  - Регулярное выражение `|` регулярное выражение.
  - Регулярное выражение, за которым тут же записано другое регулярное выражение.
  - Регулярное выражение между парой круглых скобок.
  - Регулярное выражение, за которым идёт `*`.

  Пробелы в этой записи не допускаются.

  Пример регулярного выражения:

  ```
  a((ab|b|c)c)*(cde|fg)
  ```

- Формат, который выдаёт тестирующая система, устроен для простоты считывания. Регулярное выражение — это одна из следующих конструкций:
  - `empty()` — пустое регулярное выражение.
  - `char(`, затем единственный символ рассматриваемого алфавита, затем `)`.
  - `kleene(`, затем регулярное выражение, затем `)`.
  - `or(`, затем регулярное выражение, затем `)(`, затем ещё одно регулярное выражение, затем `)`.
  - `append(`, затем регулярное выражение, затем `)(`, затем ещё одно регулярное выражение, затем `)`.

  Представление того же регулярного выражения, что было в примере к предыдущему пункту (пробелы добавлены для читаемости; в том, что выдаёт тестирующая система, гарантированно нет ни пробелов, ни каких-то ещё лишних символов):

  ```
  append(char(a))
        (append(kleene(append(or(append(char(a))
                                       (char(b)))
                                (or(char(b))
                                   (char(c)))))
                             (char(c))))
               (or(append(char(c))
                         (append(char(d))
                                (char(e))))
                  (append(char(f))
                         (char(g))))))
  ```

3.1.2 Задачи

1. Напишите программу, которая принимает на вход описание недетерминированного конечного автомата и возвращает описание детерминированного конечного автомата, который распознаёт тот же язык.

   Напишите также программу, которая производит преобразование в обратную сторону.

2. Напишите программу, которая принимает на вход описание детерминированного конечного автомата и возвращает регулярное выражение, которое распознаёт тот же язык.

   Напишите также программу, которая производит преобразование в обратную сторону.

3. Напишите программу, которая принимает на вход регулярное выражение для языка L и возвращает регулярное выражение для языка L^R.

4. Напишите программу, которая принимает на вход регулярное выражение для языка L и возвращает регулярное выражение для языка $\sqrt{L}$.

5. Напишите программу, которая принимает на вход регулярное выражение для языка L и возвращает регулярное выражение для языка $\mathrm{SHIFT}(L)$.

6. Напишите программу, которая принимает на вход регулярное выражение для языка L и возвращает регулярное выражение для языка $\mathrm{SUBSEQ}(L)$.

7. Напишите программу, которая принимает на вход регулярное выражение для языка L и возвращает регулярное выражение для языка $\frac{1}{2}(L)$.

8. Напишите программу, которая принимает на вход регулярное выражение для языка L и гомоморфизм $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ и возвращает регулярное выражение для языка $h^{-1}(L)$. Формат входа следующий:

   - Строка с единственным числом k.
   - Строка с k разделёнными пробелом символами — буквами алфавита Σ.
   - Строка с k разделёнными пробелом словами, где i'ое слово — это образ i'ого символа под h. Обратите внимание, что гомоморфный образ может быть строкой над другим алфавитом.
   - Регулярное выражение над алфавитом Γ.