

## Задание 4

10 февраля 2020 г.

1. Вася выбирает число  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$  случайным образом так, что вероятность выбора числа  $i$  пропорциональна  $\frac{1}{i}$ . Докажите, что Коля может, задав Васе в среднем  $\frac{\log_2 n}{2} + o(\log n)$  вопросов с ответами да/нет, узнать выбранное число. Докажите, что меньшим количеством вопросов ему не обойтись.
2. Алисе сообщено значение случайной величины  $\alpha$ , а Бобу – значение некоторой функции  $f$  от  $\alpha$ . Придумайте алгоритм, который позволит Алисе сообщить Бобу значение  $\alpha$ , передав в среднем не более  $H(\alpha|f(\alpha)) + 1$  битов.
3. Алена выбирает число  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$  случайным образом по известному Валере распределению вероятностей. Известно, что Валера может, задав Алене в среднем  $q$  вопросов с ответами да/нет, узнать выбранное число. Докажите, что тогда некоторое число выбирается Аленой с вероятностью не меньше  $2^{-q}$ .
4. Докажите, что функция  $I(\alpha : \beta) - I(\alpha : \beta|\gamma)$  является симметрической функцией случайных величин  $\alpha, \beta, \gamma$ .
5. Пусть случайная величина  $\alpha$  имеет распределение  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ , а случайная величина  $\beta$  имеет распределение  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ . В каких пределах могут изменяться  $I(\beta : \alpha), H(\alpha|\beta), H(\beta|\alpha), H(\alpha, \beta)$ ?
6. Пусть  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta$  образуют Марковскую цепь. Докажите, что  $I(\alpha : \delta) \leq I(\beta : \gamma)$ .