

# Теория категорий

## Функторы

Валерий Исаев

15 февраля 2019 г.

Определение

(Ко)индуктивные типы данных

Изоморфизм категорий

## Определение функторов

- ▶ Функторы между категориями  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  – это морфизмы категорий.
- ▶ Функтор  $F$  состоит из функции  $F : Ob(\mathbf{C}) \rightarrow Ob(\mathbf{D})$  и функций  $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  для всех  $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$ .
- ▶ Эти функции должны сохранять тождественные морфизмы и композиции:

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

## Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- ▶ Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ ,  $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$ , и так далее.
- ▶ Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.
- ▶ Например, существует два забывающих функтора  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Grp}$  и  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

## Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если  $M$  и  $N$  – пара моноидов, и  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – это в точности гомоморфизмы моноидов  $M$  и  $N$ .
- ▶ Пусть  $\mathbf{C}$  – декартова категория и  $A$  – объект  $\mathbf{C}$ , тогда  $A \times - : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  – функтор, сопоставляющий каждому объекту  $B$  объект  $A \times B$  и каждому морфизму  $f : B \rightarrow B'$  морфизм  $id_A \times f : A \times B \rightarrow A \times B'$ .
- ▶ Существует очевидный функтор  $I : \mathbf{Agda} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- ▶ Функторам в агде соответствуют функторы  $\mathbf{Agda} \rightarrow \mathbf{Agda}$ .

## Функторы и дуальность

- ▶ Каждому функтору  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  можно сопоставить функтор  $F^{op} : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}^{op}$ .
- ▶ Другими словами существует биекция между множествами функторов  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  и  $\mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}^{op}$ .
- ▶ С другой стороны, функторы вида  $\mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}$  никак не связаны с функторами вида  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .
- ▶ Первые называются контравариантными функторами, а вторые – ковариантными.

# План лекции

Определение

(Ко)индуктивные типы данных

Изоморфизм категорий

## Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  можно определить понятие предела  $\lim F$  и копредела  $\operatorname{colim} F$ . Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории  $\mathbf{J}$  можно рассматривать как обобщение графов, а функтор  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  – как обобщение диаграмм в  $\mathbf{C}$ .
- ▶ Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимнообратные)
- ▶ Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.
- ▶ Функторы  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  тоже называют диаграммами.



## Индуктивные типы данных

- ▶ Допустим мы хотим описать объект в произвольной категории, являющийся аналогом какой-либо структуры данных (списки, деревья, и так далее).
- ▶ В теории множеств они строятся индуктивно, то есть мы сначала определяем, скажем, множества  $L_n(A)$  списков длины не больше  $n$ , а потом говорим, что множество всех списков – это объединение множеств конечных списков  $L(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n(A)$ .
- ▶ В теории категорий можно сделать аналогичную конструкцию.
- ▶ Во-первых, определим объект  $L_n(A)$  списков длины не больше  $n$  следующим образом:

$$1 + A + A^2 + \dots + A^n$$

## Примеры бесконечных (ко)пределов

- ▶ Теперь мы можем определить объект  $L$  как следующий копредел:

$$L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots$$

- ▶ Рассмотрим вместо копредела следующий предел:

$$\dots \rightarrow L_2 \rightarrow L_1 \rightarrow L_0$$

где функция  $L_{n+1} \rightarrow L_n$  сопоставляет каждому списку  $[x_1, \dots, x_{n+1}]$  список  $[x_2, \dots, x_{n+1}]$ , а остальные списки не меняет.

- ▶ Тогда предел этой последовательности – это множество (потенциально) бесконечных списков.

## Общее определение индуктивных типов данных

- ▶ Любой (ко)индуктивный тип данных можно задать в виде функтора  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ .
- ▶ Функтор, соответствующий, спискам определяется как  $L_A(X) = 1 + A \times X$ .
- ▶ Функтор, соответствующий, бинарным деревьям определяется как  $T_A(X) = 1 + A \times X \times X$ .
- ▶ В общем случае  $F_D(X)$  задается как правая часть определения типа данных  $D$ , в котором все рекурсивные вхождения этого типа заменены на  $X$ .
- ▶ Таким образом, если  $X$  является интерпретацией  $D$ , то он должен удовлетворять уравнению  $X \simeq F(X)$ .

## Алгебры над эндифунктором

- ▶ Существует два канонических способа найти решение уравнения  $X \simeq F(X)$ , как начальную  $F$ -алгебру или конечную  $F$ -коалгебру.
- ▶ Если  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  – некоторый эндифунктор, то  $F$ -алгебра – это пара  $(X, \alpha)$ , где  $X$  – объект  $\mathbf{C}$ , а  $\alpha : F(X) \rightarrow X$  – морфизм  $\mathbf{C}$ .
- ▶ Морфизм  $F$ -алгебр  $(X, \alpha)$  и  $(Y, \beta)$  – это морфизм  $f : X \rightarrow Y$  в  $\mathbf{C}$  такой, что следующая диаграмма коммутует:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha} & X \\ F(f) \downarrow & & \downarrow f \\ F(Y) & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

## Начальные алгебры

- ▶ Легко видеть, что определения на предыдущем слайде задают категорию, которую мы будем обозначать  $F\text{-alg}$ .
- ▶ Начальный объект этой категории называется начальной  $F$ -алгеброй, и если она существует, то она является решением уравнения  $X \simeq F(X)$ .
- ▶ Если категория  $\mathbf{C}$  достаточно хорошая, то начальную  $F$ -алгебру можно определить как копредел следующей диаграммы:

$$0 \xrightarrow{!_{F(0)}} F(0) \xrightarrow{F(!_{F(0)})} F(F(0)) \xrightarrow{F(F(!_{F(0)}))} F(F(F(0))) \rightarrow \dots$$

## Начальные алгебры и индуктивные типы

- ▶ Начальные  $F$ -алгебры можно использовать для интерпретации индуктивных типов данных.
- ▶ Если  $N(X) = X \amalg 1$  – функтор, соответствующий типу данных унарных натуральных чисел, то начальная  $N$ -алгебра – это в точности объект натуральных чисел.
- ▶ Если  $L_A(X) = 1 \amalg A \times X$  – функтор, соответствующий спискам, то начальная  $L_A$ -алгебра в **Set** – это множество конечных списков элементов  $A$ .
- ▶ В общем случае начальная  $L_A$ -алгебра – это копроизведение объектов  $1, A, A^2, A^3, \dots$

## Коалгебры над эндифунктором

- ▶ Коалгебры над  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  определяются дуальным образом как пары  $(X, \alpha)$ , где  $X$  – объект  $\mathbf{C}$ , а  $\beta : X \rightarrow F(X)$  – морфизм  $\mathbf{C}$ .
- ▶ По дуальности конечные  $F$ -коалгебры тоже являются решением уравнения  $X \simeq F(X)$ .
- ▶ Если категория  $\mathbf{C}$  достаточно хорошая, то конечную  $F$ -коалгебру можно определить как предел следующей диаграммы:

$$\dots \rightarrow F(F(F(1))) \xrightarrow{F(F(!_{F(1)}))} F(F(1)) \xrightarrow{F(!_{F(1)})} F(1) \xrightarrow{!_{F(1)}} 1$$

- ▶ Конечные коалгебры являются интерпретацией коиндуктивных типов данных.
- ▶ Например, конечная  $L_A$ -коалгебра в **Set** – это множество потенциально бесконечных списков.

# План лекции

Определение

(Ко)индуктивные типы данных

Изоморфизм категорий



## Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории  $\mathbf{C}$  существует тождественный функтор  $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  и  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ , то функтор  $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$  определяется на объектах и на морфизмах как композиция  $F$  и  $G$ .
- ▶ Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  такой, что  $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$  и  $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$ .
- ▶ Категории  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  *изоморфны*, если существует изоморфизм  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .

## Злые понятия

- ▶ Как правило, имея две группы, не имеет смысла спрашивать равны ли они; нужно спрашивать об их изоморфности.
- ▶ Это верно для объектов в любой категории.
- ▶ Любое понятие, которое говорит о равенстве объектов некоторой категории, называют *злым*.
- ▶ Изоморфизм категорий – злое понятие.