

Пределы интегральных сумм

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $[a, b] = [x_0, x_n]$

1. Вычислите с помощью определенных интегралов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2}$$

2. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3 + k^3}$$

3. Вычислите

$$\frac{1}{n} \left(\sin \left(\frac{\pi}{n} \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{n} \right) \right)$$

4. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$$

Площади и длины

1. Вычислите площадь фигур ограниченных кривыми

$$y = 6x - x^2 - 7, \quad y - x + 3 = 0$$

2. На гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$, $x > 0$ отмечена точка $M(x_0, y_0)$. Найдите площадь фигуры ограниченной осью Ox , прямой OM и гиперболой

$$l[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

3. Найдите длину дуги параболы $y = x^2$, $0 \leq y \leq 2$

4. Найдите длину дуги пространственной кривой $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq t_0$

5. Найдите длину дуги кривой $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$

6. Найдите радиус окружности с центром в начале координат, которая делит дугу астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ на 3 равные части

7. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

8. Исследуйте на сходимость $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$