5 Упражнения на производящие функции - II

5.1. На плацу стоят в одну линию n солдат. Дежурный офицер разбивает эту шеренгу на произвольное число k непустых отрядов, а затем назначает в каждом отряде командира. Подсчитайте с помощью производящих функций количество h_n способов совершить эту операцию.

5.2. Докажите рекуррентное соотношение

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k). \tag{1}$$

для чисел $p_k(n)$.

5.3. С использованием диаграмм Ферре покажите, что количество разбиений числа $2n+m$ на ровно $n+m$ слагаемых одинаково при любом $m \geqslant 0$. Сосчитайте это количество разбиений.

5.4. С использованием диаграмм Ферре покажите, что количество разбиений четного числа n на четные слагаемые равно количеству разбиений, в котором любое из чисел (т.е. частей разбиений) входит четное число раз.

5.5. С использованием диаграмм Ферре покажите, что количество разбиений числа $n-m$ ровно на $(k-1)$ частей, любая из которых меньше или равна m, равно количеству разбиений числа $n-k$ ровно на $(m-1)$ частей, любая из которых меньше или равна k.

5.6. Докажите, что $p(1) + p(2) + \cdots + p(n) < p(2n)$ при $n \geqslant 1$.

5.7. Выразите количество разбиений, в которых две наибольших части равны между собой, через числа $p(n)$ и $p(n-1)$.

5.8. Подсчитать количество способов разбить n-элементное множество на блоки размерами большими или равными двум. Выразить ответ в терминах чисел Белла.

5.9. Доказать для чисел Белла так называемую формулу Добинского

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

5.10. В комнате находятся n детей. Эти дети разбиваются на группы. В каждой группе одного ребенка ставят в центр круга, а вокруг него из оставшихся в группе детей образуют хоровод. При этом хоровод может состоять как из нескольких детей, так и из одного ребенка, соединившего руки. Записать экспоненциальную производящую функцию $H(z)$, описывающую количество способов совершить эти комбинаторные действия.

5.11. С точки зрения алгоритма сортировки, использующего только сравнение элементов (сравнение возвращает “меньше”, “больше” или “равно”), возможно построить $n!$ различных упорядоченных массивов длины n без повторяющихся элементов. Количество таких массивов в случае, когда элементы могут повторяться, строго больше $n!$. Например, для $n = 2$ имеются три различных массива

$$x_1 < x_2, \qquad x_1 > x_2, \qquad x_1 = x_2,$$

а для числа $n = 3$ таких массивов уже тринадцать. Построить производящую функцию $H(z)$, описывающую количество таких массивов.

5.12. Подсчитать количество способов разбить n-элементное множество на блоки, цикличеки упорядочить каждый блок, а затем один из блоков пометить красным цветом.

5.13. Сколькими способами можно разбить группу из тридцати студентов на пары и тройки для совместной работы над курсовым проектом?

5.14. Предположим теперь, что мы не только разбиваем тридцать студентов на пары и тройки, но еще и выделяем в каждом курсовом проекте несколько частей так, что в парах студенты могут распределить эти части между собой для работы над ними a_2 способами, а в тройках — a_3 способами. Подсчитать количество способов совершить данные комбинаторные действия, выразив ответ через полиномы Белла $B_{n,k}$.

5.15. Показать, что в формуле

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot B_{n,k}(a_1, \ldots, a_n), \tag{2}$$

для подсчета коэффициентов c_n индекс k меняется от единицы до n, а в формулах

$$B_{n,k}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{a_n}{n!}\right)^{k_n}. \tag{3}$$

и

$$S(n,k) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n! (1!)^{k_1} \ldots (n!)^{k_n}}. \tag{4}$$

суммирование реально проводится по всем целым неотрицательным решениям системы

$$\begin{aligned} k_1 + \ldots + k_{n-k+1} &= k, \\ 1 \cdot k_1 + \ldots + (n-k+1) \cdot k_{n-k+1} &= n. \end{aligned}$$

Как следствие, формулы (2), (3) и (4) можно переписать в следующем виде:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot B_{n,k}(a_1, \ldots, a_{n-k+1}), \tag{5}$$

$$B_{n,k}(a_1, \ldots, a_{n-k+1}) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n-k+1}=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+(n-k+1)\cdot k_{n-k+1}=n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_{n-k+1}!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{a_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{k_{n-k+1}}, \tag{6}$$

$$S(n,k) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n-k+1}=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+(n-k+1)\cdot k_{n-k+1}=n}} \frac{n!}{k_1!(1!)^{k_1} \ldots k_{n-k+1}!((n-k+1)!)^{k_{n-k+1}}}. \tag{7}$$

5.16. Объяснить комбинаторный смысл слагаемых, стоящих в правой части формул (6).

5.17. В колоде лежит n карт. Подсчитать количество способов разбить эти карты на группы четного размера, в каждой группе образовать из карт упорядоченную стопку, а затем разложить полученные стопки в ряд.

5.18. Докажите, что $p^2(n) < p(n^2 + 2n)$ при $n \geqslant 1$.