Комбинаторика. Биномиальные коэффициенты.

1.1. Сколько чисел в диапазоне от 0 до 999 999 не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?

1.2. Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?

1.3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звездочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

1.4. Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?

1.5. Найдите количество четырехзначных чисел, не делящихся на 3 и таких, что в них нет цифр, делящихся на 3. Подсчитайте общую сумму цифр всех таких четырехзначных чисел.

1.6. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}+k(n-k)=\binom{n}{2}, \tag{1}$$

для любых неотрицательных целых $k \leqslant n$.

1.7. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{m}=\binom{n}{k}2^{n-k}.$$

1.8. С помощью правила суммы докажите тождество

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(n-i)=\binom{n+1}{3}.$$

1.9. Дайте комбинаторное доказательство тождества

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

1.10. Докажите комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}. \tag{2}$$

1.11. В игре нарды 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле либо пустое, либо занято несколькими белыми шашками, либо занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так расставить шашки на доске?

1.12. Каждая вершина выпуклого n-угольника окрашивается либо в черный, либо в белый цвет. Назовем диагональ разноцветной, если ее концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовем правильной, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек, отличных от вершин. Найдите количество правильных раскрасок.