Графы

1. Найдите общее решение следующих линейных однородных рекуррентных соотношений второго порядка:

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n; \qquad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n; \qquad a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n.$$

2. Докажите, что в любом простом графе, построенном на $n \geq 2$ вершинах, существуют по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями. Остается ли верным это утверждение для мультиграфа? Для графа без петель?

3. Докажите, что кубический граф, т. е. граф, степени всех вершин которого равны трем, всегда имеет четное число вершин.

4. Докажите, что в случае нечетных n существует турнир T, в котором для любой вершины x выполняется равенство $indeg(v) = outdeg(v)$

5. Подсчитайте количество ребер в полном двудольном графе $K_{m,n}$ на $|V(K_{m,n})| = n + m$ вершинах. Что можно сказать о параметрах m и n в случае, если полный двудольный граф $K_{m,n}$ является k-регулярным?

6. Пусть G — простой граф, построенный на 9 вершинах. Предположим, что сумма степеней вершин графа G больше или равна 27. Правда ли, что в таком графе обязательно существует вершина, степень которой больше или равна 4?

7. Докажите, что граф Q_k (т. е. k-куб) действительно является k-регулярным двудольным графом. Подсчитайте количество вершин и ребер в таком графе. Сколько различных копий P_3 и C_4 содержит такой граф?

8. Последовательностью степеней вершин графа или степенной последовательностью (degree sequence) называется список всех степеней вершин графа G, записанный в порядке невозрастания:
$$\deg(x_1) \geq \deg(x_2) \geq \ldots \geq \deg(x_n).$$
Докажите, что невозрастающая последовательность $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ целых неотрицательных чисел является степенной последовательностью некоторого графа G тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число.

9. Невозрастающая последовательность неотрицательных чисел
$$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \ldots, d_n), \qquad d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0,$$
называется *графовой,* если она является последовательностью степеней вершин некоторого *простого* графа G. Покажите, что последовательности чисел $(1, 1, 0)$ и $(2, 2, 1, 1)$ являются графовыми, предъявив для каждой из них соответствующие им простые графы.

10. Сколько различных ориентированных графов можно получить из одного и того же простого графа G, $|E(G)| = m$, ориентацией его ребер?

11. Докажите, что любой турнир, построенный на n вершинах, имеет не более одной вершины x, исходящая степень которой $outdeg(x) = n - 1$.