Случайные величины

1.1. В процессе экзамена преподаватель задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать вопросы после первого неверного ответа на задаваемый студенту вопрос. Вероятность правильного ответа на каждый вопрос равна 0.9. Постройте закон распределения дискретной случайной величины ξ, равной количеству дополнительных вопросов, задаваемых студенту. Найдите количество дополнительных вопросов, которое имеет наибольшую вероятность.

1.2. В урне находятся k белых и m черных шаров. Из нее последовательно вынимаются два шара. В первой схеме эксперимента они в урну обратно не возвращаются, во второй — возвращаются. Случайная величина ξ равна количеству вытащенных белых шаров. Найдите распределение вероятностей этой случайной величины для обеих схем проведения случайного эксперимента. Сосчитайте математическое ожидание ξ в этих схемах.

1.3. Предположим, что игральным картам присвоены следующие стоимости: туз имеет стоимость, равную одному доллару, двойка — 2 доллара, ..., десятка — 10 долларов, валет — 11, дама — 12, король — 13. Игрок вытягивает одну карту. В случае, если эта карта бубновой масти, игрок получает ее стоимость. Если червовой, то ее стоимость удваивается. Если карта черной масти, то игрок платит 10 долларов. Чему равно математическое ожидание выигрыша?

1.4. Восемь шаров, пронумерованных числами $0, 1, 1, 2, 2, 2, 5$ и 10 соответственно, помещены в урну. Игрок вытягивает три из них и получает выигрыш в сумме, равной сумме чисел на трех шарах. Каково математическое ожидание выигрыша в такой игре?

1.5. Найдите математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения.

1.6. Предположим, что у вас имеется связка из n ключей, лишь один из которых подходит к вашей двери. Вы случайным образом выбираете ключи из связки и пытаетесь открыть дверь. В первом случае вы снимаете из связки неподошедшие ключи, во втором оставляете их в связке. Подчитайте математическое ожидание количества попыток открыть дверь в первом и во втором случаях.

1.7. Верно ли, что если ξ и η — независимые случайные величины, то таковыми являются также $f(\xi)$ и $g(\eta)$, где f и g — произвольные функции?

1.8. Число ξ выбирается случайным образом из множества $\{1, 2, 3, 4\}$, а затем из этого же множества выбирается число η, большее или равное ξ. Найдите $\mathrm{E}(\eta)$, $\mathrm{Var}(\eta)$, а также $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

1.9. Докажите, что в случае пары независимых случайных величин ξ и η дисперсия

$$\mathrm{Var}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{Var}(\xi) \cdot \mathrm{Var}(\eta) + a^2 \mathrm{Var}(\xi) + b^2 \mathrm{Var}(\eta), \qquad a = \mathrm{E}(\xi), \quad b = \mathrm{E}(\eta).$$

1.10. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение с математическим ожиданием, равным e, и дисперсией, равной d. Найдите корреляцию случайных величин $a\xi + b\eta$ и $a\xi - b\eta$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

1.11. Рассматривается случайный эксперимент, заключающийся в подбрасывании трех игральных кубиков. Обозначим через ξ, η и ζ случайные величины, равные количеству очков, выпавших на первом, втором и третьем кубиках соответственно. Какие пары из приведенных ниже пар случайных величин являются независимыми?

1. ξ и η;
2. ξ и $\xi + \eta$;
3. ξ и $\eta + \zeta$;
4. $\xi + \eta$ и $\xi + \zeta$;
5. ξ^2 и η^3;
6. $\xi + \eta$ и ζ^2;
7. $7 - \eta$ и $\xi + \zeta$;
8. $\min\{\xi, \eta\}$ и $\max\{\xi, \zeta\}$;
9. $\min\{\xi, \eta\}$ и $\max\{\xi, \eta\}$.

1.12. Предположим, что случайная величина $\widetilde{\xi}$ принимает только неотрицательные значения, α — некоторая положительная константа. Докажите, что вероятность

$$\Pr(\widetilde{\xi} \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\widetilde{\xi})}{\alpha}. \tag{1}$$

Выведите из этого неравенства неравенство Чебышева.

1.13. У нас имеются $2n$ карт, n из которых красной масти, n — черной масти. Из перемешанной колоды карт достают карты до тех пор, пока в колоде не останутся карты только одной масти. Подсчитайте математическое ожидание количества карт одной масти, остающихся в колоде, в случае $n = 1, 2, 3$, а также в случае произвольного n. Чему будет равно матожидание в случае, если количество карт в колоде стремится к бесконечности?

1.14. Средняя величина вклада в банке составляет 100 тысяч рублей. Оцените вероятность того, что наудачу выбранный вклад не превысит 2 миллиона рублей.

1.15. В лотерее на выплату по выигрышам уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть в такую лотерею сумму, большую или равную 5000 рублей, меньше одного процента.

1.16. Средняя температура в квартире составляет 20 градусов, а среднее квадратическое отклонение равно 2 градуса. Оцените вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсолютной величине более чем на 5 градусов.

1.17. Игральная кость подбрасывается $n = 500$ раз. Пусть ξ — случайная величина, равная среднему арифметическому количества выпавших за n испытаний очков. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что ξ отклонится от $\mathrm{E}(\xi)$ по абсолютной величине не более, чем на $0,2$.

1.18. Дискретная случайная величина ξ принимает только два значения x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Кроме того, известно, что вероятность $\Pr(\xi = x_1) = 0.2$, математическое ожидание $\mathrm{E}(\xi) = 2.6$, а дисперсия $\mathrm{Var}(\xi) = 0.64$. Найдите закон распределения случайной величины ξ, то есть определите вероятность $\Pr(\xi = x_2)$, а также значения x_1 и x_2.