

# 1 Основные задачи

Найдите наиболее общий тип. Например, у  $K$  наиболее общий тип  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ : мы знаем, что тип первого аргумента такой же, как и тип возвращаемого значения, но больше корректная типизация терма ничего не требует.

1.  $\lambda x. x$ ;
2.  $\lambda x x. x$ ;
3.  $\lambda x^{\alpha \rightarrow \alpha}. x$ ;
4.  $\lambda x. x \mathbf{K I} x$ ;
5.  $\lambda x y z. x (y z (z x))$ .

Населите как можно большим количеством замкнутых термов типы или покажите, как сконструировать бесконечное их число ( $\alpha\beta\delta$ -эквивалентные термы перечислять не нужно, да, всегда можно просто накидать  $\mathbf{I}$ ):

6.  $\alpha \rightarrow \alpha$ ;
7.  $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$ ;
8.  $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$ ;
9.  $\alpha$ ;
10.  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ ;
11.  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$ ;
12.  $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$ ;
13.  $(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \rightarrow \beta$ ;
14.  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$  (балл за хотя бы одного представителя, а также бонусный балл за бесконечное их количество);
15.  $((((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$  (балл за хотя бы одного представителя, а также бонусный балл за бесконечное их количество).

Типизируйте по Чёрчу заданные термы. Под типизацией по Чёрчу подразумевается расстановка явным образом типовых аннотаций, то есть расписывание термов в стиле Чёрча. Например, терм  $\mathbf{I K I}$  типизируется по Чёрчу так:

$$((\lambda x^{(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}. x) (\lambda x^{\alpha \rightarrow \alpha} y^{\beta}. x) (\lambda x^{\alpha}. x)) : \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$$

16.  $\mathbf{S K K}$ ;
17.  $\mathbf{S K I}$ .

Честно, аксиоматически (то есть не просто записывая ответ, а используя указанные три правила), типизируйте (можно писать в одно дерево, не по шагам):

18. Комбинатор  $\mathbf{S}$ .

## 2 Дополнительные задачи

Задания на случай нехватки баллов.

1. Даны конструкторы списков:

$$\begin{aligned}\mathbf{cons} &:= \lambda h t f a. f h (t f a) \\ \mathbf{nil} &:= \lambda f a. a\end{aligned}$$

Постройте деревья вывода их типов.

2. Дан список, всем элементам которого можно приписать некий тип  $\alpha$ . Какой тип можно приписать самому списку независимо от его длины?
3. Тип, полученный в качестве ответа на предыдущее задание, населён только одним экземпляром. Как объяснить то, что существует явно более чем один список?
4. Выберите, что в этом списке является корректными суждениями типизации:

- (a)  $\mathbf{K} : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- (b)  $\mathbf{K} : \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
- (c)  $\mathbf{K} : \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
- (d)  $\mathbf{K} : \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
- (e)  $\{a : \beta, b : \beta \rightarrow \alpha\} \vdash \mathbf{S} b a : \alpha$
- (f)  $\{a : \beta, b : \beta \rightarrow \alpha\} \vdash \mathbf{B} b a : \alpha$
- (g)  $\{a : \beta, b : \beta \rightarrow \alpha\} \vdash \mathbf{I} b a : \alpha$
- (h)  $\{(\lambda x. x) : \alpha \rightarrow \alpha\} \vdash \lambda x. x : \alpha \rightarrow \alpha$
- (i)  $\{(\lambda x. x) : \alpha \rightarrow \alpha\} \vdash \lambda x. x : \beta \rightarrow \beta$
- (j)  $\{a : \alpha\} \vdash \mathbf{I} a : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
- (k)  $\{a : \alpha \rightarrow \alpha\} \vdash \mathbf{I} a : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
- (l)  $\{a : \alpha \rightarrow \alpha\} \vdash \mathbf{I} a : \alpha \rightarrow \alpha$
- (m)  $\{a : \alpha \rightarrow \alpha\} \vdash a b : \alpha$

5. Протипизируйте по Чёрчу  $\mathbf{S K S K}$ .
6. Протипизируйте по Чёрчу  $\mathbf{S I I}$ .
7. Протипизируйте по Чёрчу  $\mathbf{I I I}$ .