

Числа Стирлинга второго рода, числа Белла и повторение.

1.1. Докажите, что количество разбиений n -элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.

1.2. Дано число $5300 \dots 0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

1.3. Докажите, что $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n$ при $n \geq 1$ и $|x| \leq 1$.

1.4. Найдите коэффициент при $x^7 y^{11} z^3$ в многочлене $(x+y+z)^{21}$.

1.5. На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — a параллельных между собой прямых, в другом — b параллельных между собой прямых, в третьем — c параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг? Как изменится ответ в случае, если три семейства разбивают на части не круг, а плоскость?

1.6. Сколько существует 8-значных чисел таких, что числа на нечетных позициях образуют строго возрастающую последовательность, а на четных строго убывающую.

1.7. Назовем натуральное число замечательным, если у него имеется ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них обязательно найдутся два, такие, что ни один не кратен другому. Сколько существует замечательных двузначных чисел?