

Группа 1. Домашнее задание на 20 февраля 2 часть

1. (1) Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

2. Вычислите

a) (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$$

b) (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{n}{n^2 + 1} + \sin \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$$

3. (1) Найдите площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугой окружности $x^2 + y^2 = 2$ и графиком функции $y = \sqrt{|x|}$

4. (1) Найдите радиус окружности с центром в начале координат, которая делит дугу астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x \geq 0, y \geq 0$ на три дуги равной длины

5. (*) (1) Пусть f и g непрерывные функции, заданные на отрезке $[0, 1]$, функция f не убывает, и $0 \leq f, g \leq 1$. Докажите неравенство:

$$\int_0^1 f(g(x)) dx \leq \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

Подсказка: рассмотрите функцию $h(x) = f(x) - x$ и её максимум на $[0, 1]$