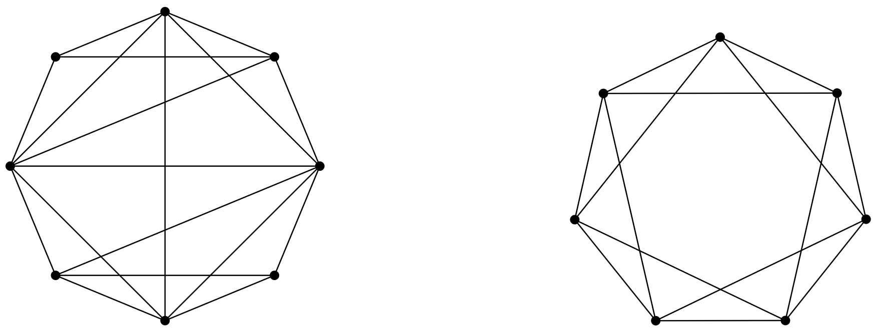
6 Упражнения на планарные графы

6.1. Октаэдр — это один из пяти выпуклых правильных многогранников, имеющий 8 треугольных граней, 12 ребер и 6 вершин степени 4. Докажите, что октаэдр является планарным графом, нарисовав симметричный плоский граф $\widetilde{G}$, описывающий одно из возможных правильных вложений октаэдра в плоскость. Постройте двойственный к нему граф $\widetilde{G}^*$. Какому планарному графу G^* он соответствует?

6.2. Найдите минимально возможный 4-регулярный планарный граф.



(a) (b)

Рис. 1

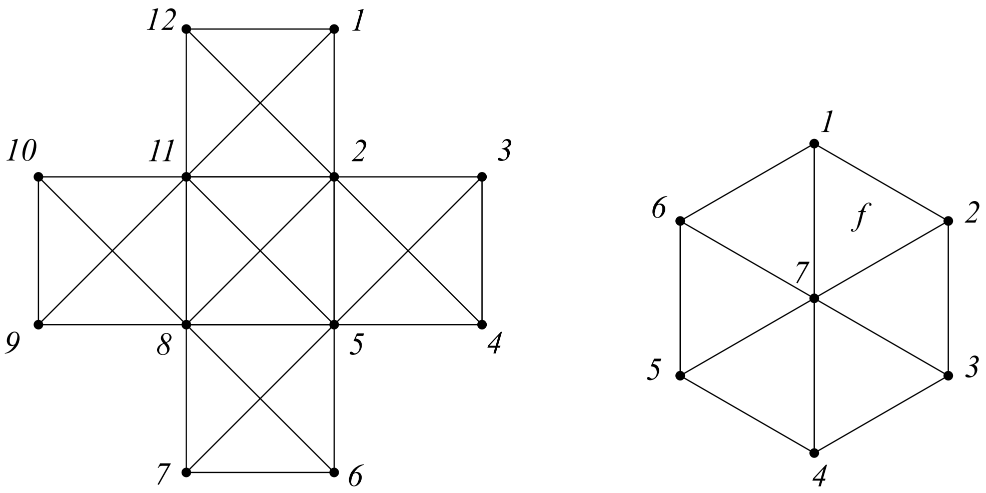
6.3. Докажите, что граф G, изображенный на рис. 1(a), можно правильно вложить в плоскость, нарисовав соответствующий ему плоский граф $\widetilde{G}$.

6.4. С помощью леммы Жордана докажите непланарность графа $K_{3,3}$.

6.5. Рассмотрим произвольный (не обязательно планарный) граф G. Попытаемся нарисовать его на плоскости так, чтобы количество пересечений изображающих ребра этого графа отрезков в точках, отличных от точек, изображающих вершины графа G, было минимальным. Получившееся в результате количество таких "неправильных" пересечений называется *числом пересечений* cr(G) (crossing number) графа G. Оно выступает своеобразной мерой его непланарности и показывает, какое минимальное количество ребер в G нужно удалить для того, чтобы превратить его в планарный. Так, у планарных графов $\mathrm{cr(G)} = 0$, у графа K_5 это число равно единице, и т. д. Докажите, что число пересечений 4-регулярного графа G, построенного на семи вершинах (рис. 1(b)), равно единице.

6.6. В процессе доказательства непланарности графа K_5 мы, в частности, доказали, что граф $K_5 - e$, где e — произвольное ребро графа K_5, можно правильным образом вложить в плоскость. Иными словами, мы показали, что граф $K_5 - e$ является так называемым *максимальным планарным графом,* т. е. простым графом, добавление любого ребра к которому превращает его в непланарный. Заметим, что правильное вложение в плоскость графа $K_5 - e$ представляет собой некоторую триангуляцию плоскости, т. е. разбиение ее на грани степени 3. Докажите, что данный факт справедлив и в общем случае, а именно что планарный граф, построенный на $n \geqslant 3$ вершинах, представляет собой некоторую триангуляцию плоскости тогда и только тогда, когда он является максимальным планарным графом.

6.7. Предположим, что граф G имеет 100 вершин и 300 ребер. Является ли он планарным?



(a) (b)

Рис. 2

6.8. Докажите, что в случае плоского графа, имеющего ровно k связных компонент, формула Эйлера принимает вид

$$n - m + r = k + 1.$$

6.9. Пусть T — дерево на $n > 2$ вершинах. Сколько ребер нужно к нему добавить, чтобы получился максимальный планарный граф?

6.10. Докажите, что в случае простого связного плоского графа без треугольников справедливо неравенство $m \leqslant 2n - 4$. Используя это свойство, докажите непланарность графа $K_{3,3}$.

6.11. Выразите количество m ребер через количество n вершин в произвольном самодвойственном плоском графе, т. е. графе, для которого $\widetilde{G} \cong \widetilde{G}^*$.

6.12. Покажите, что средняя степень вершин в планарном графе меньше шести.

6.13. Покажите, что если количество n вершин в графе G больше или равно 11, то либо сам граф G, либо дополнение к нему $\bar{G}$ планарным не является.

6.14. Пусть G — планарный 4-регулярный граф, построенный на 16 вершинах. Предположим, что его правильное вложение в плоскость состоит только из треугольных и/или четырехугольных граней. Сколько треугольных и сколько четырехугольных граней имеет такое вложение?

6.15. Рассмотрим максимальный планарный граф G, построенный на $n \geqslant 4$ вершинах и m ребрах. Обозначим через n_i количество вершин степени i. Докажите, что для чисел n_i выполняется равенство

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + 4n_{10} + \ldots$$

Используя это равенство, докажите, что в графе G имеются по меньшей мере четыре вершины, степени которых не превосходят пяти.

6.16. В упражнениях к первому параграфу мы ввели число пересечений cr(G) графа G как меру его непланарности. Оказывается, существует и еще одна популярная мера непланарности графа — так называемая *толщина* (thickness) графа $t(G)$, под которой понимают минимальное количество его планарных подграфов H_i, композиция

$$H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_\vartheta$$

которых дает нам исходный граф G. Термин "толщина графа" пришел в теорию графов из микроэлектроники, в которой электрические цепи печатаются на непроводящей (как правило, кремниевой) плате, называемой *печатной платой*. Так как контакты между элементами печатной платы (транзисторами, конденсаторами и т. д.) наносятся на плату неизолированными, то они не должны пересекаться между собой. Иными словами, соответствующие графы на плате должны быть плоскими.

На практике, однако, заранее неизвестно, сколько контактов может понадобиться и какие элементы печатных плат они должны соединять между собой. С точки зрения теории графов это означает, что граф, описывающий печатную плату, планарным может и не являться. Как следствие, с технологической точки зрения мы должны предусмотреть несколько печатных плат (или несколько слоев одной и той же печатной платы) для построения полной электрической цепи на плате. Отсюда и определение толщины графа G как наименьшего количества печатных плат, которые нужно наложить друг на друга для обеспечения функциональности проектируемой электрической сети.

В случае планарных графов $t(G) = 1$. Для графов K_5 и $K_{3,3}$ толщина равна двум. Докажите, что в случае простого графа G, построенного на $n \geqslant 3$ вершинах и m ребрах, его толщина ограничена снизу величиной $m/(3n-6)$.

6.17. Докажите, что для двудольного графа $K_{s,t}$ справедлива следующая оценка на его толщину:

$$t(K_{s,t}) \geqslant \frac{st}{2s+2t-4}.$$

6.18. Рассмотрим граф, показанный на рис. 2(a). Является ли он планарным? Максимально планарным? Если он планарным не является, удалите несколько ребер, чтобы сделать его максимально планарным. Если он является планарным, но не является максимально планарным, добавьте к нему ребра так, чтобы он стал максимально планарным.

6.19. Вложите планарный граф G, отвечающий плоскому графу $\widetilde{G}$, изображенному на рис. 2(b), в плоскость так, чтобы грань f стала внешней.