Графы

1. Рассмотрим произвольную смежную пару вершин $\{x, y\}$ в простом графе G на n вершинах. Доказать, что ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\deg(x) + \deg(y) - n$ треугольникам в графе G.

   Решение

   По сути, нужно доказать, что вершины x и y имеют по меньшей мере k общих смежных вершин, $k = \deg(x) + \deg(y) - n$. А это сделать довольно легко с помощью схемы раскладки предметов по ящикам. В качестве ящиков мы можем взять n вершин, в качестве предметов — суммарное количество степеней вершин x и y. При этом в каждый ящик мы можем положить максимум два предмета (граф — простой, так что один предмет — это вершина, смежная с x, а второй — вершина, смежная с y). Ясно, что $n \geq \deg(x) + \deg(y) - j$, где j — количество ящиков, в которые попали два предмета. Следовательно, $j \geq \deg(x)+\deg(y)-n = k$.

2. По последовательностям $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$ и $(5, 5, 4, 3, 3, 2)$ построить связные графы с минимальным количеством петель и мультиребер. Можно ли по ним построить простые графы? Если да, то предъявить подобное построение, по возможности, наиболее простое.

3. Доказать, что последовательность

   $$(n, n, n-1, n-1, \ldots, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

   всегда является графовой.

   Решение

   Покажем, что такой последовательности отвечает некоторый двудольный граф (см.рис.**??**). Обозначим через $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, вершины первой и второй доли соответственно. Соединим вершину x_i с каждой из вершин y_j, $j = i, \ldots, n$. В результате получим, что любая вершина x_i будет иметь степень $\deg(x_i) = n + 1 - i$, а любая вершина y_i — степень, равную i. У построенного графа будет нужная нам степенная последовательность.

4. Пусть M_a и M_i — матрицы смежности и инцидентности простого графа G. Чему равны диагональные коэффициенты матриц M_a^2 и $M_i M_i^t$, где M_i^t — транспонированная к M_i матрица? Как связаны недиагональные элементы матриц $M_i M_i^t$ и M_a?

   (Про матрицы можно прочитать на википедии1 и википедии2) Решение

   У матрицы $M_i M_i^t$ на диагонали стоят элементы $a_{i,i}$, которые, по сути, представляют собой скалярное произведение i-й строки соответствующей матрицы на саму себя. В силу симметричности матрицы M_a тот же факт верен и для диагональных элементов матрицы M_a^2. Но и в том и в другом случае скалярный квадрат i-й строки есть не что иное, как степень i-й вершины графа G. Действительно, количество единиц в любой i-й строке матрицы M_i, а также сумма чисел в i-й строке матрицы M_a совпадают с количеством смежных с i вершин в графе G.

   В случае $i \neq j$ любой элемент матрицы $M_i M_i^t$ представляет собой скалярное произведение i-й и j-й строк матрицы M_i. Любое слагаемое этого скалярного произведения отлично от нуля тогда и только тогда, когда в графе G имеется ребро, соединяющее вершины i и j. Следовательно, такое скалярное произведение равно единице в случае, когда вершина i смежна с j в графе G, и нулю в противном случае, т. е. представляет собой, по сути, элемент $a_{i,j}$ матрицы смежности M_a графа G.

5. Доказать, что для произвольного турнира T справедливо равенство

$$\sum_{x\in V(T)} outdeg(x)^2 = \sum_{x\in V(T)} indeg(x)^2.$$

Решение

Заметим, что для любой вершины $x \in V(T)$ справедливо равенство

$$outdeg(x) + indeg(x) = n - 1.$$

Следовательно, доказываемое неравенство можно переписать так:

$$\sum_{x\in V(T)} outdeg(x)^2 = \sum_{x\in V(T)} (n-1-outdeg(x))^2.$$

Раскроем правую часть записанного равенства:

$$\sum_{x\in V(T)} (n-1-outdeg(x))^2 = (n-1)^2\cdot n - 2(n-1)\sum_{x\in V(T)} outdeg(x) + \sum_{x\in V(T)} outdeg(x)^2.$$

Нам, таким образом, осталось показать, что

$$(n-1)^2\cdot n = 2(n-1)\sum_{x\in V(T)} outdeg(x),$$

а это равенство очевидно в силу того, что

$$\sum_{x\in V(T)} outdeg(x) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

6. Неубывающая последовательность чисел

$$\mathbf{s_1} := (s_1, s_2, \ldots, s_n): \qquad s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n \le n-1 \tag{1}$$

называется последовательностью количества очков (score sequence), если существует турнир T, построенный на n вершинах, для которого $outdeg(x_i) = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что для любой последовательности (1) количества очков справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \ge \binom{k}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}. \tag{2}$$

Решение

Так как в любом полном графе ровно $\binom{n}{2}$ ребер, то равенство

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$$

немедленно следует из равенства

$$\sum_{x\in V(D)} indeg(x) = |E(D)| = \sum_{x\in V(D)} outdeg(x), \tag{3}$$

Кроме того, любой набор вершин $\{x_1, \ldots, x_k\}$, $k = 1, \ldots, n-1$, образует подтурнир $\vec{K}_k$ в турнире T. Так как для каждой вершины x_i, $i = 1, \ldots, k$ исходящая степень $outdeg(x_i)_k$ в подтурнире меньше или равна исходящей степени этой вершины в турнире T, то

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \ge \sum_{i=1}^{k} outdeg(x_i)_k = \binom{k}{2}.$$

(2 балла) Доказать, что условия (2) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы неубывающая последовательность (1) была последовательностью количества очков.

Указание. Один из возможных способов доказательства достаточности этого факта — индукция по числу

$$t := \sum_{k=1}^{n} t_k, \qquad t_k := \sum_{i=1}^{k} s_i - \binom{k}{2}.$$

В процессе доказательства нужно показать, что существуют индексы $r < k$, такие, что $s_r - s_{r-1} \geq 2$ и $s_{k+1} - s_k \geq 2$, уменьшить s_r на единицу, увеличить s_k на единицу, и воспользоваться индукционным предположением.

Решение

Рассмотрим некоторую числовую невозрастающую последовательность $\mathbf{s}$, удовлетворяющую условиям (2). Построим по $\mathbf{s}$ новую числовую последовательность $\mathbf{t}$ следующим образом:

$$t_k := \sum_{i=1}^{k} s_i - \binom{k}{2}.$$

Проведем доказательство нашего утверждения индукцией по числу

$$t := \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

База индукции — это случай $t = 0$, то есть случай, когда для любого k число $t_k = 0$. Такой последовательности чисел t_k отвечает так называемый транзитивный турнир, то есть турнир, для которого $s_i = i - 1$, $i = 1, \ldots, n$; в нем ребро из вершины x_i в вершину x_j идет тогда и только тогда, когда $i > j$.

Теперь докажем наше утверждение для некоторого $t > 0$, считая, что для всех чисел, меньших t, утверждение верно. Обозначим через r наименьший индекс в последовательности t_i, для которого $t_r > 0$. В случае, если $r = 1$, мы имеем $s_1 \geq 1$, а в случае $r > 1$ мы можем записать, что $s_r - s_{r-1} \geq 2$. Действительно, в силу минимальности r имеем $s_i = i-1$, $i = 1, \ldots, r-1$, и, в частности, $s_{r-1} = r-2$, а $s_r > r - 1$.

Обозначим через k наименьший индекс, такой, что $k > r$ и $t_k = 0$. Такой индекс обязательно существует — мы знаем, что $t_n = 0$. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{k-1} s_i > \binom{k-1}{2}, \qquad \sum_{i=0}^{k} s_i = \binom{k}{2}, \qquad \sum_{i=0}^{k+1} s_i \geq \binom{k+1}{2}.$$

С использованием основного тождества для биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

последнее неравенство мы можем переписать так:

$$\sum_{i=0}^{k+1} s_i = \sum_{i=0}^{k} s_i + s_{k+1} = \binom{k}{2} + s_{k+1} \geq \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k}{2} + k.$$

Следовательно, $s_{k+1} \geq k$. Аналогично,

$$\sum_{i=0}^{k} s_i = \sum_{i=0}^{k-1} s_i + s_k = \binom{k}{2} = \binom{k-1}{2} + \binom{k-1}{1} = \binom{k-1}{2} + k - 1.$$

Но

$$\sum_{i=0}^{k-1} s_i > \binom{k-1}{2},$$

поэтому из равенства

$$\sum_{i=0}^{k-1} s_i + s_k = \binom{k-1}{2} + k - 1$$

следует, что $s_k < k - 1$. Подводя итоги, мы можем утверждать, что $s_{k+1} - s_k \geq 2$.

Вычтем тогда из s_r единицу и добавим эту единицу к s_k. В результате из последовательности $\mathbf{s}$ мы получим некоторую новую неубывающую последовательность $\mathbf{s}'$. По построению, она также удовлетворяет условиям (2). Кроме того, все t'_i, $i = r, \dots, k-1$, уменьшились на единицу по сравнению с соответствующими числами t_i. Как следствие, число

$$t' = \sum_{i=1}^{n} t'_i$$

уменьшилось по сравнению с t на $k - r$. Но тогда, по индукционному предположению, у нас найдется турнир $\vec{K}'_n$, для которого $\mathbf{s}'$ будет последовательностью количества очков. Если в этом турнире имеется ребро (x_k, x_r), то, меняя направление этого ребра на противоположное, мы получим турнир T, для которого $\mathbf{s}$ будет последовательностью количества очков. В противном случае из неравенства $s_k \geq s_r$ следует, что в турнире $\vec{K}'_n$ найдется вершина y, в которую ведет ребро из x_{s_k} и из которой идет ребро в x_{s_r}. Меняя ориентации этих ребер на противоположные, мы вновь получим турнир T, для которого $\mathbf{s}$ будет последовательностью количества очков.