Практика по алгоритмам, ВШЭ

Сергей Копелиович, Владислав Кораблинов

Осень, 2020

Contents

1 Асимптотика и линейные алгоритмы **2**
1.1 Практика . . . 2
1.2 Домашнее задание . . . 4
1.3 Дополнительные задачи . . . 4

2 Сортировки и кучи **6**
2.1 Практика . . . 6
2.2 Домашнее задание . . . 6
2.3 Дополнительные задачи . . . 7

3 Шустрая сортировка и порядковые статистики **12**
3.1 Практика . . . 12
3.2 Домашнее задание . . . 13
3.3 Дополнительные задачи . . . 13

4 Демоническое программирование **14**
4.1 Практика . . . 14
4.2 Домашнее задание . . . 15
4.3 Дополнительные задачи . . . 15

5 Жадные алгоритмы и динамика **17**
5.1 Практика . . . 17
5.2 Домашнее задание . . . 19
5.3 Дополнительные задачи . . . 20
5.4 Разбор практики . . . 21

6 Поиск в глубину **23**
6.1 Практика . . . 23
6.2 Домашнее задание . . . 23
6.3 Разбор практики . . . 25

7 Кратчайшие пути **26**
7.1 Практика . . . 26
7.2 Домашнее задание . . . 28

8 Остовные деревья **30**
8.1 Практика . . . 30
8.2 Домашнее задание . . . 32

9 Потоки и разрезы **33**
9.1 Практика . . . 33
9.2 Домашнее задание . . . 34

10 Бинарные деревья поиска **36**
10.1 Практика . . . 36
10.2 Домашнее задание . . . 36
10.3 Дополнительные задачи . . . 37

11 Поиск подстроки в строке **38**
11.1 Практика . . . 38
11.2 Домашнее задание . . . 39
11.3 Дополнительные задачи . . . 39
11.4 Разбор практики . . . 40

12 Хеширование **41**
12.1 Практика . . . 41
12.2 Домашнее задание . . . 43
12.3 Дополнительные задачи . . . 43

13 Алгебра **44**
13.1 Практика . . . 44
13.2 Домашнее задание . . . 46
13.3 Дополнительные задачи . . . 46

14 NP-полные задачи **47**
14.1 Практика . . . 47
14.2 Дополнительные задачи . . . 48
14.3 Какое еще домашнее задание?? . . . 49

1 Асимптотика и линейные алгоритмы

1.1 Практика

Напомним определения:

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \equiv \exists N, C > 0 : \forall n \geq N : f(n) \leq C \cdot g(n)$
- $f(n) \in \Omega(g(n)) \equiv \exists N, C > 0 : \forall n \geq N : C \cdot g(n) \leq f(n)$
- $f(n) \in \Theta(g(n)) \equiv \exists N, C_1 > 0, C_2 > 0 : \forall n \geq N : C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$
- $f(n) \in o(g(n)) \equiv \forall C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) < C \cdot g(n)$
- $f(n) \in \omega(g(n)) \equiv \forall C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : C \cdot g(n) < f(n)$

Все функции здесь $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ или $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ (далее будет ясно из контекста, какой класс функций используется). В дальнейшем, когда речь идет о принадлежности функций вышеопределенным множествам, мы будем использовать знак "=" вместо "$\in$", т.к. в литературе обычно используются именно такие обозначения.

Асимптотики

1. Докажите, что:
   (a) $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \mathcal{O}(f(n))$
   (b) $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$
   (c) $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$
2. **Контекст имеет значение**
   Правда ли, что $f(n) = \mathcal{O}(f(n)^2)$?
3. **Классы**
   Определим отношение "$\sim$". Будем говорить, что $f \sim g$, если $f = \Theta(g)$. Покажите, что $\sim$ — отношение эквивалентности, т.е. оно
   - Рефлексивное: $\forall f : f \sim f$,
   - Симметричное: $\forall f, g : f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$,
   - Транзитивное: $\forall f, g, h : (f \sim g) \wedge (g \sim h) \Rightarrow f \sim h$.
4. **Порядки**
   Определим отношение "$\preceq$". Будем говорить, что $f \preceq g$, если $f = \mathcal{O}(g)$.
   Определим отношение $f \preceq g \equiv f = \mathcal{O}(g)$.
   (a) Докажите, что $\preceq$ — отношение предпорядка (рефлексивное и транзитивное)
   (b) Докажите, что $\preceq$ — не отношение частичного порядка, так как не удовлетворяет антисимметричности
   (c) Докажите, что $\preceq$ — отношение частичного порядка на классах эквивалентности по $\sim$?
5. Считайте, что функции здесь $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\forall n : f(n) > 1 \wedge g(n) > 1$.
   (a) $f(n) = \Omega(f(n/2))$?
   (b) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = \mathcal{O}(\log g(n))$?
   (c) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = \mathcal{O}(2^{g(n)})$?
   (d) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = o(\log g(n))$?
   (e) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$?
   (f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Omega(\log n)$?
6. Определить асимптотику (считайте, что при $x \leq 100$ будет выполняться $T(x) = 100$).
   (a) $T(x) = T(a) + T(x - a) + n$ для натурального числа a.
   (b) $T(x) = T(\frac{x}{2}) + 1$.
   (c) $T(x) = 2 \cdot T(\sqrt{x}) + \log x$

Линейные алгоритмы

7. Дана скобочная последовательность, составленная из скобок `'('`, `')'`, `'['`, `']'`, `'{'`, `'}'`. Последовательность называется корректной, если каждой открывающей скобке соответствует закрывающая скобка того же типа, и соблюдается вложенность. Примеры: `([{}])` и `()()` – корректные, а `[)` и `[(])` – нет.

   Придумайте алгоритм, который проверяет корректность последовательности за линейное время.

8. Пусть элементы здесь линейно упорядочены и мы умеем сравнивать их за $\mathcal{O}(1)$.

   (a) Придумайте стек, в котором можно узнавать минимум за $\mathcal{O}(1)$. Все остальные операции стека также должны работать за $\mathcal{O}(1)$.

   (b) Придумайте очередь, в которой можно узнавать минимум за $\mathcal{O}(1)$. Все остальные операции очереди должны работать за амортизированное $\mathcal{O}(1)$.

   (c) Придумайте более эффективный по памяти вариант очереди с минимумом на основе пары из обычной очереди и дека.

9. Дан массив целых чисел a_i. Придумайте структуру данных, которая бы умела отвечать на запросы вида "По данным l и r вернуть $\sum_{i=l}^{r} a_i$" за $\mathcal{O}(1)$.

   Разрешается сделать предподсчёт за $\mathcal{O}(n)$. Значения в массиве не меняются.

10. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{N}$. Найти l, r $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что сумма $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Задачу требуется решить за линейное от n время.

11. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$. Для каждого a_i найти самый правый из элементов, которые левее и не больше его. Задачу требуется решить за линейное от n время.

12. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$. Найти l, r $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что

    (a) значение $(r - l + 1) \min_{i \in [l,r]} a_i$ было бы максимально.

    (b) значение $\left(\sum_{i \in [l,r]} a_i\right) \min_{i \in [l,r]} a_i$ было бы максимально.

    Задачу требуется решить за линейное от n время.

13. Вам дан массив натуральных чисел и число k. Требуется найти подотрезок массива такой, что НОК чисел на нем равен k или заявить, что такого нет. Время работы: $\mathcal{O}(nT_{LCM}(k))$, где $T_{LCM}(k)$ — время подсчета НОК для чисел размера k.

1.2 Домашнее задание

1. Дайте ответ для двух случаев $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$:
   (a) Если в определении $\mathcal{O}$ опустить условие про N (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли полученное определение эквивалентно исходному?
   (b) Тот же вопрос про o.
2. Считайте здесь, что $\forall n : f(n) > 1 \wedge g(n) > 1$. Правда ли, что $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$?
3. Заполните табличку и поясните (особенно строчки 4 и 7):

A	B	$\mathcal{O}$	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\log^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
$\log(n!)$	$\log(n^n)$					

   Здесь все буквы, кроме n, — константы.
4. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{N}$. Найти l, r $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что сумма $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Задачу требуется решить за линейное от n время. **Подсказки:**
   - Для каждого i найдите максимальное такое r_i, что $\sum_{j=i}^{r_i} a_j \le S$ за $\mathcal{O}(n)$ для каждого i.
   - Найдите за $\mathcal{O}(n)$ ответ задачи, если известны $r_1, \ldots, r_n$.
   - Докажите, что $r_i \le r_{i+1}$
   - Пользуясь предыдущим пунктом найдите все r_i за $\mathcal{O}(n)$.
5. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$.
   (a) За $\mathcal{O}(n)$ для каждого a_i найти самый правый из элементов, которые левее и меньше его.
   (b) За $\mathcal{O}(n)$ для каждого a_i найти самый левый из элементов, которые правее и меньше его.
   (c) За $\mathcal{O}(n)$ найти l, r $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что значение $(r - l + 1) \min_{i \in [l,r]} a_i$ было бы максимально.
   (d) За $\mathcal{O}(n)$ найти l, r $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что значение $\left(\sum_{i \in [l,r]} a_i\right) \min_{i \in [l,r]} a_i$ было бы максимально.
6. Вам дан массив из n элементов и список из m запросов $add(x, l, r)$: прибавить x к каждому элементу на отрезке $[l, r]$. За $\mathcal{O}(n + m)$ выведите массив, получающийся из исходного после выполнения заданных запросов.
7. *(только группа Антона)* Определить асимптотику $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \log n \rfloor) + 2^{\log^* n}$, где $\log^* n$ — итерированный логарифм.

1.3 Дополнительные задачи

1. Упорядочите функции по скорости роста и обозначьте неравенства между соседями. Укажите, в каких неравенствах $f = o(g)$, а в каких $f = \Theta(g)$

$\log(\log^* n)$	$2^{log^* n}$	$(\sqrt{n})^{\log n}$	n^2	$n!$	$(\log n)!$
$(3/2)^n$	n^3	$\log^2 n$	$\log n!$	2^{2^n}	$n^{1/\log n}$
$\ln \ln n$	$\log^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\log \log n}$	$\ln n$	1
$2^{\ln n}$	$(\log n)^{\log n}$	e^n	$4^{\log n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\log n}$
$\log^* \log n$	$2^{\sqrt{2 \log n}}$	n	2^n	$n \log n$	$2^{2^{n+1}}$

Примечание: $\log^*(n) = \begin{cases} 0 & \texttt{если } n \le 1; \\ 1 + \log^*(\log n) & \texttt{иначе}. \end{cases}$

2. Определить асимптотику (считайте, что при $n \leq 100$ будет выполняться $T(n) = 100$).
   (a) $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) + n$.
   (b) $T(n) = T(\alpha \cdot n) + T((1 - \alpha) \cdot n) + n$ для произвольной константы $\alpha \in (0, 1)$.
   (c) $T(n) = 4 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n^k$ для $k \in \{1, 2, 3\}$.

3. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$. Найти l, r $(1 \leq l \leq r \leq n)$ такие, что сумма $\sum_{i=l}^{r} a_i$ была бы максимальной. Задачу требуется решить за линейное от n время.

4. Дано число, представленное n цифрами в d-ичной записи без ведущих нулей. Из числа требуется вычеркнуть ровно k цифр так, чтобы результат был максимальным. Задачу требуется решить за линейное от n время.

5. Вам дан массив из n элементов и число k. Все числа лежат в отрезке $[1..n]$. Найдите такие l и r, что на отрезке $[l, r]$ встречается хотя бы k различных элементов, или сообщите, что такого отрезка нет. Если таких отрезков несколько, выберите тот из них, длина которого минимальна. Время работы $\mathcal{O}(n)$.

6. Вам дан массив натуральных чисел и число k. Требуется найти подотрезок массива такой, что НОК чисел на нем равен k или заявить, что такого нет. Время работы: $\mathcal{O}(nT_{LCM}(k))$, где $T_{LCM}(k)$ — время подсчета НОК для чисел размера k.

7. Дана квадратная матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $\mathcal{O}(n^2)$.

8. Вам каждый день на протяжении некоторого времени поступает запрос «вырастет ли курс Apple на бирже», и у вас есть n советников, с которыми вы можете консультироваться. Вы отвечаете да или нет, и в конце каждого дня вам говорят, правильно ли вы ответили. Придумайте алгоритм, который сделает не более $10(\log n + m)$ ошибок, где m — число ошибок, которое сделает лучший советник (подсказка: назначьте советникам веса и изменяйте их в зависимости от правильности их ответов).

9. Придумайте расширяющийся массив с реальным (не амортизированным) временем добавления $\mathcal{O}(1)$.

10. Дан массив целых чисел от 1 до n длины $n + 1$, который нельзя модифицировать. Используя $\mathcal{O}(\log n)$ битов дополнительной памяти, найдите в массиве пару одинаковых чисел за $\mathcal{O}(n)$.

11. Дана последовательность $\sigma =< a_1, a_2, \cdots, a_m >$, где каждый $a_i \in [n] = \{1, 2, \cdots, n\}$. Обозначим частоту появления элемента x через $f_\sigma[x] = |\{i | a_i = x\}|$. Известно, что $\exists_x f_\sigma[x] = 1$ и для всех остальных значений $y \neq x, f_\sigma[y] \equiv 0 \mod 2$. Требуется найти x за один проход по последовательности, используя $\mathcal{O}(\log n + \log m)$ бит памяти.

12. Дана последовательность $\sigma =< a_1, a_2, \cdots, a_m >$, где каждый $a_i \in [n]$. Известно, что $\exists_x f_\sigma[x] > \frac{m}{2}$. Требуется найти x за один проход по последовательности, используя $\mathcal{O}(\log n + \log m)$ бит памяти.

2 Сортировки и кучи

2.1 Практика

1. Есть n веревок, каждая имеет целую длинну l_i, которые можно резать. Нужно получить k одинаковых кусков максимальной целочисленной длины (также могут остаться неиспользованные обрезки). $\mathcal{O}(n \log l_{\max})$.

2. Есть k отсортированных массивов. В сумме массивы содержат n элементов. Слить массивы за $\mathcal{O}(n \log k)$.

3. Придумайте детерминированную структуру данных на основе бинарной кучи, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.

4. Модифицируйте операцию `SiftUp` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\mathcal{O}(\log \log n)$ сравнений.

5. Модифицируйте операцию `SiftDown` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\log_2 n + \mathcal{O}(\log \log n)$ сравнений.

6. Даны два массива a и b длины n, сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в сортированном порядке.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

   (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (d) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

   Здесь считайте, что дополнительная память — количество чисел длины $\mathcal{O}(\log n)$, которые вы можете сохранить.

7. Покажите, что любая сортировка сравнениями, которая верно работает хотя бы на доле $\frac{1}{100^n}$ от всех перестановок, не может работать за $o(n \log n)$ на всех тестах.

8. Дана обычная бинарная куча (с минимумом в голове), требуется узнать k-й минимум.

   (a) $\mathcal{O}(k \log n)$

   (b) $\mathcal{O}(k^2)$

   (c) $\mathcal{O}(k \log k)$

9. Пусть дан массив размера n из целых чисел. Требуется сделать предварительные вычисления (в будущем мы будем кратко называть их *предподсчёт*) за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы затем ответить на некоторое неизвестное число запросов про массив вида "сколько раз число x встречается на отрезке $[l..r]$", причём на каждый запрос можно потратить $\mathcal{O}(\log n)$ времени.

10. Инверсией в массиве чисел $a[\ldots]$ называется такая пара индексов i, j, что $i < j$, но $a_i > a_j$.

    Дан массив из n различных элементов. Требуется найти число инверсий за $\mathcal{O}(n \log n)$.

2.2 Домашнее задание

1. Есть m стойл с координатами $x_1, \ldots, x_m$ и n коров. Расставить коров по стойлам (не более одной в стойло) так, чтобы минимальное расстояние между коровами было максимально. $\mathcal{O}(m(\log m + \log x_{\max}))$.

2. *(только группа Антона)* Даны два сортированных массива длины n, которые нельзя модифицировать. Найдите k-ю порядковую статистику в объединении массивов (то есть элемент, находившийся бы на k-ой позиции если бы массивы слили), используя $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

   (a) За $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

(b) За $\mathcal{O}(\log n)$.

3. *(только группа Влада)* Даны два массива a и b длины n, сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в сортированном порядке.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

   (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (d) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

   Здесь считайте, что дополнительная память — количество чисел длины $\mathcal{O}(\log n)$, которые вы можете сохранить.

4. *(только группа Влада)* Дана обычная бинарная куча (с минимумом в голове), требуется узнать k-й минимум.

   (a) $\mathcal{O}(k \log n)$

   (b) $\mathcal{O}(k \log k)$

5. *(только группа Влада)* Пусть дан массив размера n из целых чисел. Требуется сделать предварительные вычисления (в будущем мы будем кратко называть их *предподсчёт*) за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы затем ответить на некоторое неизвестное число запросов про массив вида "сколько раз число x встречается на отрезке $[l..r]$", причём на каждый запрос можно потратить $\mathcal{O}(\log n)$ времени.

6. В свободное время Анка-пулемётчица любит сортировать патроны по серийным номерам. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке, как Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на k. Всего патронов n. Помогите Анке отсортировать патроны.

   (a) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.

   (b) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n + I)$, где I — число инверсий.

   (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.

   (d) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$ (если вы решили этот пункт, автоматически засчитается и пункт а).

7. *(только группа Антона)* Дано $2n - 1$ коробок с чёрными и белыми шарами. В i-ой коробке находится w_i белых и b_i чёрных шаров. Всего в коробках находится W белых и B чёрных шаров. Требуется выбрать n коробок таким образом, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а чёрных не менее $\frac{B}{2}$. Решить за $\mathcal{O}(n \log n)$.

2.3 Дополнительные задачи

1. Дан массив длины n, в котором встречаются $m \leq n$ различных элементов.

   (a) Пусть зафиксирован набор частот элементов $p_i > 0, i = 1 \dots m$. Докажите нижнюю оценку $n \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{1}{p_i} \right) - n \log e$ на число сравнений в худшем случае при сортировке сравнениями. Полезный факт: $n \ln n \geq \ln n! = n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n)$.

   (b) Докажите нижнюю оценку $n \log \frac{m}{e}$ на число сравнений в худшем случае при сортировке сравнениями в пределе, если $m = o(n)$.

2. Куча хранится в массиве длины n. Родитель p хранит детей в ячейках $2 \cdot p + 1$ и $2 \cdot p + 2$. Алгоритм приступает к сортировке. Сортировка устроена следующим образом.

   - Поменять первый и последний элемент кучи местами.

- Уменьшить размер кучи на единицу.
- Запустить `SiftDown` на первом элементе.

`SiftDown` меняет родителя с наибольшим ребенком (при условии, что ребенок больше родителя)и запускается рекурсивно. Требуется придумать алгоритм, который по n выдаёт перестановку чисел от 1 до n, которая является корректной кучей и приводит к максимальному количеству вызовов `SiftDown` при сортировке. Время работы — $\mathcal{O}(n \log n)$.

3. (a) Дано множество из n точек на плоскости. Найти пару ближайших точек за $\mathcal{O}(n \log n)$.
   (b) Дано множество из n векторов на плоскости. Разрешается координату любого вектора умножить на -1. Найти пару векторов, чья сумма минимальна, за $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. Дано бинарное дерево: $Tree ::= Node(Tree, Tree)|Empty$ (эта запись означает, что дерево — это либо вершина с парой потомков-деревьев, либо особое значение $Empty$). Определим функцию **rank(**x**)** следующим образом:

   - $\mathbf{rank}(Empty) = 0$
   - $\mathbf{rank}(Node(left, right)) = min(\mathbf{rank}(left), \mathbf{rank}(right)) + 1$.

   Назовём бинарное дерево *скошенным влево (левацким)*, если для его вершин выполнено следующее свойство:

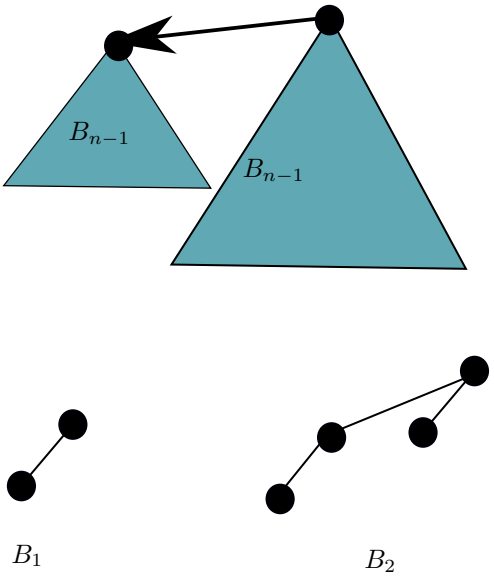
   $$\forall_{x=Node(left,right)} \mathbf{rank}(left) \geq \mathbf{rank}(right).$$

   Скошенная влево (левацкая) куча — это скошенное влево дерево, в вершинах которого хранятся данные, для которых выполнено свойство кучи.

   (a) Докажите, что для любого скошенного влево дерева $|T| \geq 2^{\mathbf{rank}(T)} - 1$ ($|T|$ обозначает количество вершин в дереве T).
   (b) Придумайте, как слить две скошенные влево кучи H_1 и H_2 за время $\mathcal{O}(\log |H_1| + \log |H_2|)$.
   (c) Придумайте, как используя операцию слияния, построенную на предыдущем шаге, реализовать операции:
      - `Insert(x)` — добавление элемента x в кучу,
      - `ExtractMin()` — удаление минимального элемента из кучи.

5. Пусть B_n (биномиальное дерево порядка n) определено следующим образом:

   - при $n = 0$ это дерево из одной вершины.
   - при $n > 0$ это B_{n-1}, корню которого первым ребенком подвешено еще одно B_{n-1}.



(a) Докажите, что B_n имеет высоту n.

(b) Докажите, что в B_n содержится ровно 2^n вершин.

(c) Определим биномиальную кучу как набор биномиальных деревьев, в котором нет двух деревьев одного порядка. Покажите, что для любого n существует биномиальная куча с n вершинами.

(d) Пусть на всех деревьях биномиальной кучи выполняется свойство кучи (min в голове). Придумайте `GetMin` за $\mathcal{O}(\log n)$.

(e) Придумайте `Merge` за $\mathcal{O}(\log n)$.

(f) Придумайте `Add` за $\mathcal{O}(\log n)$.

(g) Придумайте `ExtractMin` за $\mathcal{O}(\log n)$.

(h) Придумайте `DecreaseKey` по ссылке на узел. $\mathcal{O}(\log n)$.

(i) Придумайте `Delete` по ссылке на узел. $\mathcal{O}(\log n)$.

6. Покажите, что n операций `Add` подряд в биномиальную кучу работают за $\mathcal{O}(n)$.

7. Рассмотрим бинарную скошенную систему исчисления. На каждой позиции в скошенной записи числа может стоять цифра 0, 1 или 2. Число $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1}$ в скошенной системе переводится в десятичную по формуле $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot (2^i - 1)$.

   В скошенной системе счисления есть два ограничения: цифра 2 может встречаться в записи не более одного раза; все цифры следующих меньших разрядов равны нулю. Пример первых чисел: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 100, 101 . . .

   (a) Докажите, что каждое неотрицательное целое число имеет единственное возможное представление в скошенной системе счисления.

   (b) Придумайте, как увеличить число в скошенной системе на единицу за $\mathcal{O}(1)$.

8. Определим структуру данных “скошенный список”. Список длины n строится так:

   - запишем число n в скошенной системе счисления: $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1}$

- для каждого i смотрим в соответствующую позицию скошенной записи числа n и создаём a_i полных двоичных деревьев высоты i
- размещаем n элементов списка: сперва выбираем дерево в порядке возрастания высоты, а внутри конкретного дерева размещаем в порядке обхода в глубину: «корень, левый ребёнок, правый ребёнок»

Примеры скошенных списков длин $1, 2, 3, 4, 5$:

Figure 1: Лист [a] (число: 1)

Figure 2: Лист [a b] (число: 2)

Figure 3: Лист [a b c] (число: 10)

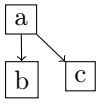


Figure 4: Лист [a b c d] (число: 11)

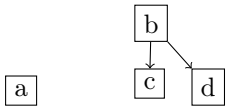
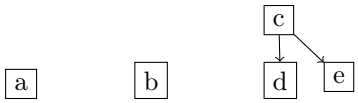


Figure 5: Лист [a b c d e] (число: 12)



Придумайте, как реализовать следующие операции со списком длины n:

(a) Добавление элемента в начало списка за $\mathcal{O}(1)$.

(b) Доступ к i-му элементу за $\mathcal{O}(\log n)$.

(c) Получить скошенный список из k последних элементов данного скошенного списка за $\mathcal{O}(\log n)$.

9. Придумайте структуру данных, которая поддерживает следующие операции (в оценках времени работы n — текущее количество элементов):

   - `Insert(x)` — добавление элемента x за $\mathcal{O}(\log n)$,
   - `ExtractMin()` — удаление минимального элемента за $\mathcal{O}(\log n)$,
   - `Clone()` — копирование структуры за $\mathcal{O}(1)$ (после копирования с каждой из копий можно независимо проделывать любую из данных трех операций).

   Подсказка: за основу можно взять левацкую кучу.

10. Стуктура данных «файл последовательного доступа» поддерживает следующие операции за $\mathcal{O}(1)$:

- *Read()*: чтение числа из файла на текущей позиции и перевод позиции вперёд на 1 элемент.
- *Write(x)*: запись числа в файл в текущую позицию и перевод позиции вперёд на 1 элемент.
- *Rewind()*: перевод позиции на начало файла.

Требуется отсортировать файл за $\mathcal{O}(n \log n)$ используя $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти и $\mathcal{O}(1)$ дополнительных файлов.

3 Шустрая сортировка и порядковые статистики

3.1 Практика

1. (a) Приведите вероятностный алгоритм поиска медианы в массиве различных чисел со средним временем работы $\mathcal{O}(n)$
   (b) Приведите детерминированный алгоритм поиска медианы в массиве различных чисел с гарантированным временем работы $\mathcal{O}(n)$
2. Придумайте, как добиться от `QuickSort` времени $\mathcal{O}(n \log n)$ в худшем случае.
3. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков n. Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Любые два пирожка можно поменять местами. Память у робота маленькая, $\mathcal{O}(\log n)$ бит. Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.
4. Дан набор из n пар гаек и болтов, в разных парах размеры гаек и болтов различны. Гайки и болты перемешаны. Требуется для каждой гайки найти соответствующий болт. Сравнивать можно только болты с гайками (сравнить две гайки между собой, или два болта между собой — невозможно). $\mathcal{O}(n \log n)$ в среднем.
5. Пусть задан массив A из $n = a \cdot k$ различных чисел. Требуется разбить массив на k частей по a элементов в каждой так, чтобы любой элемент части i был бы меньше любого элемента части $i + 1$ ($\forall i \in [1, k - 1]$). $\mathcal{O}(n \log k)$ в среднем.
6. Дан массив из $2 \cdot n - 1$ числа, который нельзя модифицировать. Есть дополнительная память на $n + 1$ элемент массива и ещё $\mathcal{O}(1)$ сверху. Требуется найти медиану за $\mathcal{O}(n \log n)$.
7. Дана последовательность из n чисел, нужно за один проход и $\mathcal{O}(n)$ времени в среднем найти в ней k минимумов, используя $\mathcal{O}(k)$ дополнительной памяти.
8. Даны массив из n чисел и m чисел $p_1, p_2, \ldots p_m$, нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого i найти p_i-ую порядковую статистику.
9. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное и максимальное за $3n - 2$ сравнения.
10. Найти второй максимум в массиве за $n + \mathcal{O}(\log n)$ сравнений.

3.2 Домашнее задание

1. Оцените время работы детерминированного алгоритма поиска порядковой статистики, если вместо пятерок разбивать элементы на
   (a) семерки.
   (b) тройки.
2. (*только группа Влада*) Даны массив из n чисел и m чисел $p_1, p_2, \dots p_m$, нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого i найти p_i-ую порядковую статистику.
3. Дан массив `A[1..n]` из n различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти k ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.
   (a) По позиции в отсортированном массиве.
   $$d(x, \texttt{median}) = |\texttt{pos}(x) - \texttt{pos}(\texttt{median})|,$$
   где $\texttt{pos}(x)$ — позиция элемента x в отсортированном массиве.
   (b) По значению.
   $$d(x, \texttt{median}) = |x - \texttt{median}|.$$
4. Даны два массива из положительных целых чисел a и b, размер обоих равен n. Выбрать массив p из k различных чисел от 1 до n так, чтобы $\frac{\sum_{i=1}^{k} a_{p_i}}{\sum_{i=1}^{k} b_{p_i}} \to \max$. Время $\mathcal{O}(n \log M)$, где $M = \max(\max(a_i), \max(b_i), n)$.
5. Докажите, что для поиска максимума в массиве различных чисел потребуется как минимум $n - 1$ сравнение.
6. Дана последовательность из n чисел, нужно за один проход и $\mathcal{O}(n)$ времени в среднем найти в ней k минимумов, используя $\mathcal{O}(k)$ дополнительной памяти.
7. (*только группа Антона*) Дан массив из $2n$ различных чисел. Найдите минимальное и максимальное за $3n - 2$ сравнения и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.

3.3 Дополнительные задачи

1. В матрице Q из натуральных чисел размера $N \times N$ найти подматрицу размера $H \times W$ с максимальной медианой. H, W — нечётные.
   (a) $\mathcal{O}(N^2 \log Q_{\max})$. Здесь $Q_{\max}$ — максимальный элемент матрицы.
   (b) $\mathcal{O}(N^2 \log N)$.
2. Пусть алгоритм A находит i-ый по порядку элемент, используя только попарные сравнения элементов. Покажите, что, используя результаты только этих сравнений, можно найти все элементы, меньшие i-ого, и все элементы, большие i-ого.
3. Дан массив из $2n$ различных чисел. Найдите минимальное и максимальное за $3n-2$ сравнения и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.
4. Найдите второй максимум в массиве за $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ сравнение и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.
5. Дан массив длины n. Изначально выделен отрезок позиций $1 \dots d$. Далее $n - d$ раз поступает команда «выведите медиану чисел в окне и сдвиньте отрезок на 1 направо».
   (a) Обработайте каждую команду за $\mathcal{O}(\log n)$.
   (b) Докажите, что не существует такой функции $f(n) \in o(\log n)$, что каждую команду можно обработать за $f(n)$.

4 Демоническое программирование

4.1 Практика

1. Найдите максимальную возрастающую подпоследовательность за $\mathcal{O}(n \log n)$.

   a) Найти длину
   b) Восстановить ответ

2. Найти максимальное по весу паросочетание за $\mathcal{O}(n)$ на

   (a) дереве из n вершин,

   (b) простом цикле из n вершин,

   (c) связном неориентированном графе из n вершин и n рёбер.

   Веса на рёбрах.

3. Есть следующее рекуррентное соотношение:

$$a_n = a_{n-1} + 2c_{n-1} + 1$$
$$b_n = 5 - c_{n-1}$$
$$c_n = c_{n-2} - b_{n-1}$$

   Нам известны $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$. Найти a_n, b_n, c_n по модулю p за $\mathcal{O}(\log n)$.

4. Даны две последовательности длины n. Придумайте, как найти наидлиннейшую общую подпоследовательность этих последовательностей.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2)$.

   (b) За $\mathcal{O}(n \log n)$, в случае, если в одной из последовательностей все элементы различны.

5. Дан массив из n целых чисел и число d. Найти подпоследовательность максимальной длины с условием, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на d.

6. Дан массив из n целых чисел, число d и число k. Найти подпоследовательность длины k с максимальной суммой элементов при условии, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на d.

7. Дано натуральное число $s \leqslant 300$. Найти набор натуральных чисел, сумма которых будет равна s, а их наименьшее общее кратное — максимально.

4.2 Домашнее задание

1. Дана строка s длины n. Для каждой пары (i, j) найти длину максимального общего префикса i-го и j-го суффиксов строки s. $\mathcal{O}(n^2)$.

2. Дан набор нечестных монеток с вероятностью выпадения орла $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Требуется посчитать вероятность выпадения ровно k орлов за $\mathcal{O}(n \cdot k)$. Операции над числами считать выполнимыми за $\mathcal{O}(1)$.

3. (*только группа Влада*)
Дан массив из n целых чисел и число d. Найти подпоследовательность максимальной длины с условием, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на d за $O(n^2)$.

4. (*только группа Влада*)
Дан массив из n целых чисел, число d и число k. Найти подпоследовательность длины k с максимальной суммой элементов при условии, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на d. $O(n^2 k)$.

5. (*только группа Серёжи*)
Пусть есть n подарков разной натуральной стоимости и три поросёнка. Нужно раздать подарки как можно честнее (так, чтобы минимизировать разность суммарной стоимости подарков самого везучего поросёнка и самого невезучего). Придумайте алгоритм решения данной задачи за $\mathcal{O}(nW^2)$, где W — суммарная стоимость подарков.

6. Клетки поля $n \times 5$ покрашены в чёрный и белый цвета. Будем называть получившийся узор красивым, если он не содержит одноцветного квадрата 2×2. Вычислите число красивых узоров по модулю небольшого простого числа за время $\mathcal{O}(\log n)$.

4.3 Дополнительные задачи

1. (*1 балл за пункты a + b вместе и 1 балл за пункт c*)
Дана строка из латинских букв длины n, нужно ее запаковать в максимально короткую, используя правило (k, i) — повторить k символов начиная с i-й позиции. Заметим, что длина (k, i) – не константа. Например, $xyababababz \to xyab(8,2)z$, $xyaaaabaaaabaaaab \to xya(3,2)b(10,2)$ (но это не оптимально, оптимально $xyaaaab(10,2)$).

   (a) $\mathcal{O}(n^3)$.

   (b) $\mathcal{O}(n^2)$, считая, что длина строки (k, i) – константа.

   (c) $\mathcal{O}(n^2)$.

2. (*1 балл за пункты a + b вместе и 1 балл за пункт c*)
Есть k грузовиков с заданной вместимостью, задача – перевезти n вещей с заданными весами минимальным числом заездов. Один заезд – погрузить и отправить все грузовики.

   (a) $k = 1$, $\mathcal{O}(3^n)$.

   (b) $k = 2$, $\mathcal{O}(4^n)$.

   (c) $\mathcal{O}(3^n k)$.

3. (*1 балл за пункты a + b вместе и 1 балл за пункт c*)
Вычислите, сколькими способами можно замостить доминошками клетчатое поле

   (a) $n \times 3$, за время $\mathcal{O}(n)$.

   (b) $n \times m$, за время $\mathcal{O}(4^n m)$.

   (c) $n \times m$, за время $\mathcal{O}(2^n nm)$.

   Ответ посчитать по модулю небольшого простого числа.

4. Вам дана доска фанеры размера $n \times m$. В неё было вбито несколько гвоздей с целыми координатами (от них остались некрасивые дырки). Сколькими способами можно разрезать доску на прямоугольники с целыми сторонами так, чтобы ни один из гвоздей не попал внутрь прямоугольника. Время: $\mathcal{O}(n^2 4^m)$.

5. ***** (*Эту задачу можно сдавать только устно*)
   Приведите полиномиальный алгоритм, вычисляющий количество разбиений клетчатой доски $n \times m$ на доминошки (другими словами, на прямоугольники 1×2 и 2×1).

6. Посчитать по модулю небольшого простого числа количество способов, которыми можно расставить на доске $n \times n$ сколько-либо небьющих друг друга коней, за $\mathcal{O}(n\, 8^n)$

5 Жадные алгоритмы и динамика

5.1 Практика

1. **Подпоследовательность-палиндром**

   Дана строка длины $n \leq 100$.
   Найти максимальную по длине подпоследовательность, которая является палиндромом.

2. **Пираты**

   Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут a_i и время t_i, через которое пират приплывёт и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут a и угловая скорость вращения ω. Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну определить порядок уничтожения пиратов за $\mathcal{O}(n^2)$, чтобы не допустить непотребства.

3. **И снова подпоследовательности**

   Дан массив из n натуральных чисел: $a_1, \ldots, a_n$. Выберите подпоследовательность $i_1 \leq \ldots \leq i_k \in \{1, \ldots, n\}$, такую, что $l \leq |i_j - i_{j-1}| \leq r$ и $\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \to \max$.

   a) За $\mathcal{O}(n^2)$.
   b) За $\mathcal{O}(n)$.

4. **Subset cover**

   Дано число n и семейство из m множеств, каждое из которых — подмножество $U = \{1, 2, \ldots, n\}$. Выбрать минимальное количество элементов семейства, чтобы всё U было ими покрыто.

5. **Перевозка товаров**

   Есть грузовик с заданной вместимостью, задача – перевезти n вещей с заданными весами со склада в магазин минимальным числом заездов.

   a) $\mathcal{O}(3^n)$. Обязательно.
   b) (*) $\mathcal{O}(2^n n)$.

6. **Мягкие дедлайны**

   В фирму поступило n заказов, у каждого есть время исполнения t_i и жёсткий дедлайн d_i. В каком порядке выполнять заказы, чтобы всё успеть?

7. (*) **Жёсткие дедлайны**

   В фирму поступило n заказов, у каждого есть время исполнения t_i и жёсткий дедлайн d_i. В каком порядке и **какие** выполнять заказы, чтобы успеть **побольше**?

8. **Заказы и время конца**

   В фирму поступило n заказов, которые можно выполнять в произвольном порядке. На выполнение заказа i необходимо время t_i. В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Пусть e_i – момент окончания выполнения заказа номер i. Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Время $\mathcal{O}(n \log n)$.

9. **Атлеты**

   n атлетов хотят выстроить из своих тел башню максимальной высоты. Башня это цепочка атлетов, первый стоит на земле, второй стоит у него на плечах, третий стоит на плечах у второго и т.д. Каждый атлет характеризуется силой s_i и массой m_i. Сила это максимальная масса, которую атлет способен держать у себя на плечах. Известно, что если атлет тяжелее, то он и сильнее, но атлеты равной массы могут иметь различную силу.

   a) В каком порядке выстроиться спортсменам, чтобы получилась башня высоты n?
      Если это возможно, конечно. $\mathcal{O}(n \log n)$.
   b) Какова максимальная высота башни? За $\mathcal{O}(n^2)$ динамикой.
   c) (*) Какова максимальная высота башни? За $\mathcal{O}(n \log n)$ жадностью.

10. **Выбор заявок в маршрутке**

    Маршрутка совершает рейс от первой до n-й остановки. В маршрутке m мест для пассажиров. Есть k человек, про каждого заранее известно, что он хочет доехать от остановки s_i до f_i. Проезд для пассажира стоит 1 вне зависимости от расстояния между остановками. Максимизируйте прибыль, при условии, что можно выбирать, кого сажать в маршрутку на каждой остановке. $n, m, k \leq 10^6$.

11. **(*) Идейная**

    Машина тратит единицу топлива на километр, имеет бак объёма k и находится в начале прямой дороги в точке 0. Для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на i-м километре дороги есть заправочная станция со своей положительной ценой c_i. Определите за время $\mathcal{O}(n)$, как проехать n километров за минимальную стоимость.

12. **(*) Подпоследовательности и сортировки**

    Даны скобочные последовательности из круглых скобок. в каком порядке их склеить, чтобы получилась правильная?

13. **(*) Станки и сортировки**

    Имеется n деталей и два станка. Каждая деталь должна сначала пройти обработку на первом станке, затем — на втором. При этом i-ая деталь обрабатывается на первом станке за a_i времени, а на втором — за b_i времени. Каждый станок в каждый момент времени может работать только с одной деталью. Требуется составить такой порядок подачи деталей на станки, чтобы итоговое время обработки всех деталей было бы минимальным. $\mathcal{O}(n \log n)$.

5.2 Домашнее задание

1. **(2) Паросочетания**

   Дан взвешенный неориентированный граф из $n \leq 20$ вершин. Найдите максимальное по весу паросочетание.

2. **(2) Белоснежка и гномы, которые не хотят спать**

   Даны n гномов. Если i-го гнома укладывать спать a_i минут, он потом спит b_i минут. Можно ли сделать так, чтобы в какой-то момент все гномы спали? $\mathcal{O}(n \log n)$.

3. **(2) Интерактивная обработка заказов**

   В фирму поступают заказы, которые можно выполнять в произвольном порядке. В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Изначально заказов нет, i-й заказ поступает в момент времени r_i, работать над ним нужно t_i. Пусть e_i – момент окончания выполнения заказа номер i. Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Переходить от одного заказа к другому можно в любой момент времени (даже если заказ не доделан до конца, незаконченный заказ можно будет возобновить с того же места). Свойства заказа (r_i, t_i) не известны до момента его поступления. Всего поступит n заказов.

   a) За время $\mathcal{O}(n^2)$.
   b) *(доп.)* (+1) За время $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. **(1+1) Степени и антиклики**

   Будем называть *независимым множеством* или *антикликой* попарно несвязное подмножество вершин графа. Пусть в графе G есть n вершин, а максимальная степень равна d. Найдите в нём независимое множество размера хотя бы

   a) $\frac{n}{d+1}$ за время $\mathcal{O}(n)$
   b) $\sum\limits_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v)+1}$ за время $\mathcal{O}(n \log n)$

   Считайте, что граф уже дан в памяти в виде массива, где для каждой вершины хранится список её соседей.

5. **(2) Авторитеты**

   Есть n человек. Человек i готов примкнуть к нашей банде, если наш авторитет хотя бы a_i, при этом он к нашему авторитету прибавит b_i. Наш изначальный авторитет равен A. $a_i, b_i, A \in \mathbb{Z}$

   a) Можем ли завербовать всех людей? $\mathcal{O}(n \log n)$.
   b) *(доп.)* (+2) Какое максимальное число людей мы можем завербовать? $\mathcal{O}(n \log n)$. Половина балла даётся за доказательство.

6. **(3) Орлы и равноправие** *(только группа Серёжи)*

   Даны n монеток, у каждой есть своя вероятность выпадения орла p_i. Нужно выбрать подмножество размера k (чётное число) из них, для которого вероятность выпадения ровно $\frac{k}{2}$ орлов при одновременном подбрасывании максимальна.

   a) $\mathcal{O}(n \log n + k^3)$.
   b) *(доп.)* (+1) $\mathcal{O}(n + k^2)$.

   Не забывайте включить жадный настрой.
   Не забывайте, что любую гипотезу можно проверить, вы же программисты.
   Разрешается пользоваться знаниями из динамического программирования и математики.

5.3 Дополнительные задачи

1. **(2+2) Окружности и отрезки**

   Даны n непересекающихся кругов на плоскости. Мы стоим в точке $(0, 0)$ и можем стрелять по прямой. Минимальным числом выстрелов проткнуть все круги.

   a) Все круги целиком лежат в первой четверти плоскости.
   b) Круги произвольны

2. **(1+1) Школьники и ямы**

   n школьников упали в яму глубины S. Каждый школьник имеет рост (от ног до плеч) h_i и длину рук l_i. Школьники могут вставать друг другу на плечи, верхний школьник может вытянуть руки.

   a) Могут ли выбраться все школьники? $\mathcal{O}(n \log n)$.
   b) Какое максимальное число школьников может выбраться? $\mathcal{O}(n \log n)$.

3. *Раскраской вершин* графа $G = (V, E)$ называется функция $c : V \to [m]$, сопоставляющая каждой вершине G цвет от 1 до m. Раскраска называется *правильной*, если каждая пара соседних вершин имеет разные цвета.

   Для неориентированного графа $G = (V, E)$ его *хроматическим числом* $\chi(G)$ называется наименьшее возможное число цветов в правильной раскраске G.

   Для графа G обозначим размер его максимального полного подграфа через $\omega(G)$.

   Рассмотрим на вещественной прямой замкнутые отрезки $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Сопоставим каждому отрезку I_i вершину v_i и каждой паре пересекающихся отрезков (I_i, I_j) ребро (v_i, v_j). Такой граф будем называть *интервальным графом*.

   Будем называть граф G *совершенным*, если для любого его индуцированного подграфа H верно $\omega(H) = \chi(H)$.

   Докажите, что каждый интервальный граф совершенен. Приведите алгоритм, красящий интервальный граф $G = (V, E)$ с $|V| = n$ в $\omega(H)$ цветов за время $O(n \log(n))$.

4. В фирму поступают заказы, которые можно выполнять в произвольном порядке. В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Изначально заказов нет, i-й заказ поступает в момент времени r_i, работать над ним нужно t_i.

   Все заказы объединены в проекты (один заказ относится к одному проекту, заказы из одного проекта могут поступать не подряд).

   Пусть e_i – момент окончания выполнения последнего (в порядке выполнения) из заказов в проекте с номером i.

   Нужно распределить работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Свойства заказа $(r_i, t_i$, его проект) не известны до момента его поступления. Переходить от одного заказа к другому можно в любой момент времени (даже если заказ не доделан до конца).

   Придумайте решение, которое не более чем в два раза хуже оптимального. Время $\mathcal{O}(n \log n)$, при условии, что всего поступит n заказов.

5.4 Разбор практики

1. **Подпоследовательность-палиндром**

   Идём с двух краёв. Левый L. Правый R.
   Или $s[L] = s[R]$ и мы их берём в ответ, или выкидываем один из них.Получаем:

$$dp[L,R] = \max \begin{cases} dp[L{+}1,R] \\ dp[L,R{-}1] \\ dp[L{+}1,R{-}1]+1 \quad \text{s[L]=s[R]} \end{cases}$$

   В $dp[L,R]$ храним длину максимальной подпоследовательности-палиндрома, которую можно получить из отрезка $[L,R]$. База: $dp[i,i]=1$, $dp[i{+}1,i]=0$.
   $\mathcal{O}(n^2)$ состояний, из каждого 2 перехода за $\mathcal{O}(1)$ каждый.

2. **Пираты**

   Повращаем мысленно лучом смерти. Он уничтожает всё, через что проходит $\Rightarrow$ следующий умерший пират – или ближайший слева к лучу, или ближайший справа $\Rightarrow$ в любой момент времени неубитые пираты образуют отрезок $[L,R]$ на окружности. Чем быстрее мы убили убитых, тем выгодней для будущего $\Rightarrow time[L,R] \to \min$. Переходы: убить или L, или R. Чтобы понимать, за сколько луч повернётся до нового положения, нужно знать старого. К счастью, оно совпадает с последним убитым пиратом (или $L{-}1$, или $R{+}1$), всего 2 варианта $where$. Добавляем измерение к нашей динамике: $time[L,R,where]$.
   $\mathcal{O}(n^2)$ состояний, из каждого 2 перехода за $\mathcal{O}(1)$ каждый.

3. **И снова подпоследовательности**

   Задача. Дан массив из n натуральных чисел: $a_1,\ldots,a_n$. Выберите подпоследовательность $i_1 \le \ldots \le i_k \in \{1,\ldots,n\}$, такую, что $l \le |i_j - i_{j-1}| \le r$ и $\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \to \max$.

   Решение. $f[i]$ – максимальная длина подпоследовательности, заканчивающейся в i.
   $f[i] = \left(\max_{j \le i-r}(f[j])\right) + 1$. Похоже на максимум на префиксе $\Rightarrow$ поддерживаем параллельно $F[i] = \max_{j<i}(f[i]) \Rightarrow f[i{+}1] = F[i-r]+1, F[i{+}1] = \max(F[i], f[i])$.

4. **Subset cover**

   Подмножества $\{0,1,\ldots,n{-}1\}$ храним как n-битовые целые числа. $i \in A \Leftrightarrow A \;\&\; 2^i \neq 0$.
   Такие множества мы умеем объединять и пересекать за $\mathcal{O}(1)$: `A,B -> A | B,A & B`.

   Динамика $f[B]$ – минимальное количество множеств, дающих в объединении B.
   База: $f[0]=0$. Переход для динамики вперёд: $relax(f[B \cup A_i], f[B]+1)$.
   Память $\mathcal{O}(2^n)$ (число состояний), времени $2^n m$ – по m переходов из каждого состояния.

5. **Перевозка товаров**

   Динамика назад за $\mathcal{O}(3^n)$. Перевезли множество A. За последний заезд перевезли какое-то $B \subseteq A$. $f[A] = 1 + \max_{B \subseteq A}(f[B])$. База: $f[0]=0$. Ответ $f[2^n{-}1]$ В $f[A]$ хранится минимальное число заездов для перевозки A.

   Оценим время работы $T = \sum\limits_{A} \sum\limits_{B \subseteq A} 2^{|B|} = \sum\limits_{k=|B|} \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$.

   Динамика назад за $\mathcal{O}(2^n n)$. Давайте за ход или отправлять уже загруженный транспорт, или добавлять туда один предмет. Получаем $\langle f, w \rangle [A] \to \min$, где f – количество уже сделанных заездов, w – вес, погруженный сейчас. минимизация идёт сперва по f, при равных f по w. Переходы для динамики вперёд: погрузить $i \notin A$, если $w + a_i > W$, придётся отправить текущий и начать грузить новый.

6. **Мягкие дедлайны**

   Сортируем по возрастанию дедлайна d_i. Выполняем в таком порядке.

   Доказательство. Нам нужно показать, что $\exists$ хотя бы один такой ответ, что на первом месте d_{min} (сортировка будет следовать по индукции). Пусть на первом месте что-то другое d_s. Пусть T – сумма всех t_i, кто выполняется ранее d_{min} (включая d_min). $T \le d_{min} \wedge \forall i \; d_min \le d_i \Rightarrow$ можно поменять местами местами d_s и d_{min}.

7. **(*) Жёсткие дедлайны**

   Сортируем по возрастанию t_i. Добавляем в множество A в таком порядке.
   После каждого добавления нужно проверить, что выполнить A всё ещё можно, для этого за $\mathcal{O}(n)$ смотрим A в порядке d_i (см. предыдущую задачу). Итого $\mathcal{O}(n^2)$.

   Доказательство. Аналогично. Нужно проверить, что t_{min} можно поставить на первое место.

   Решение за $\mathcal{O}(n \log n)$. Сортируем по возрастанию d_i. Добавляем в множество A в таком порядке. Если не можем добавить очередное $\langle d_i, t_i \rangle$, смотрим на $T = \max_{j \in A}(t_j)$ и, если $t_i > T$. Выкидываем T, вместо него берём $\langle d_i, t_i \rangle$. Без доказательства.

8. **Заказы и время конца**

   Сортируем по t_i.

   Один из способов придумать такое решение. Решим для $n = 2$.
   `if` ($t_1 + (t_1 + t_2)$ `<` $t_2 + (t_1 + t_2)$) `(1,2) else (2,1)`.
   Полученный `if` используем как компаратор в сортировке.

   Доказательство: пусть не по возрастанию t_i, поменяем два соседних, стоящих в неправильно порядке, ответ улучшится.

9. **Атлеты**

   Правильное решение: сортировка по сумме $s_i + m_i$.
   Как такое придумать? Есть два способа.

   Первый: задаться вопросом, кого мы можем поставить в самый низ? Любого i: $s_i \geq (\sum \text{всех } m_j) - m_i \Leftrightarrow m_i + s_i \geq$ `CONST`. Почему бы не поставить максимального. Пусть $\exists$ ответ для $n \Rightarrow$ выкинем из ответа любого, ответ для оставшихся $n-1$ всё ещё $\exists \Rightarrow$ ставим вниз максимального и далее по индукции.

   Второй: решить задачу для $n = 2$. $s_1 \geq m_2$ vs $s_2 \geq m_1 \Leftrightarrow s_1 - m_2 \geq 0$ vs $s_2 - m_1 \geq 0 \Rightarrow$ возьмём компаратор $s_1 - m_2 > s_2 - m_1 \Leftrightarrow s_1 + m_1 > s_2 + m_2$. Далее решение нужно доказать. На практике достаточно написать стресс-тест и не доказывать формально.

10. **Выбор заявок в маршрутке**

    Это ровно задача про жадный выбор заявок для k аудиторий.

    Пробуем сортировать по **левому** *концу.* Жадно берём отрезки в ответ.
    Проблема случится, если после добавления $\langle L_i, R_i \rangle$ точка L_i покрыта $k+1$ отрезком. Нужно кого-то выкинуть. Думаем о будущем $\Rightarrow$ выкидываем $\max R_j \Rightarrow$ нужен `set<int> s` правых концов. При проверке покрытости L_i удаляем из `s` все $R_j < L_i$, смотрим на `s.size()`.

    Пробуем сортировать по **правому** *концу.* Жадно берём отрезки в ответ. Будем поддерживать ответ в виде «k стеков, в каждом стеке отрезки попарно непересекаются».
    Для каждого стека важен только правый конец последнего отрезка $\Rightarrow$ храним `set<int> s` правых концов и очередной отрезок $[L_i, R_i]$ пытаемся дописать к стеку `s.upper_bound(`L_i`)`.

11. **(*) Идейная**

    Утверждение: тот литр бензина благодаря которому мы проедем от i к $i+1$ мы купили на отрезка $(i - k, i] \Rightarrow$ поддерживаем минимум на очереди.

12. **(*) Подпоследовательности и сортировки**

    ?

13. **(*) Станки и сортировки**

    ?

6 Поиск в глубину

6.1 Практика

1. **Просто ориентируй**
   Ориентировать неорграф так, чтобы он стал ацикличным за $\mathcal{O}(V + E)$.

2. **Берегите деревья**
   Ориентировать неорграф так, чтобы он стал сильно связным за $\mathcal{O}(V + E)$.

3. **Разве это не NP-трудно?**
   Дан DAG, найти в нем гамильтонов путь за $\mathcal{O}(V + E)$.

4. **Единственный топсорт**
   Дан DAG, проверить единственность топологической сортировки за $\mathcal{O}(V + E)$.

5. **dfs всемогущий**
   Даны два множества вершин: A и B, за $\mathcal{O}(V + E)$ проверить, есть ли путь из какой-нибудь вершины $a \in A$ в какую-нибудь вершину $b \in B$.

6. **Чётность циклов**
   За $\mathcal{O}(V + E)$ найти в неорграфе какой-нибудь цикл нечётной длины.

7. **В поисках простого цикла**
   a) Найти цикл в орграфе через данное ребро за $\mathcal{O}(E)$.
   b) Найти цикл в орграфе через данную вершину за $\mathcal{O}(E)$
   c) Найти в неорграфе какой-нибудь цикл за $\mathcal{O}(V)$.

8. **Ценность времени**
   Дано подвешенное дерево, нужно с линейным предподсчётом научиться отвечать на запрос «правда ли вершина u лежит в поддереве вершины v» online за $\mathcal{O}(1)$.

9. **Телепортация в дереве**
   Дано корневое дерево и m телепортов. Для каждой вершины v дерева насчитайте самую высокую вершину, куда можно телепортироваться из поддерева v.

10. **Мосты**
    Дан связный неорграф, нужно найти в нем за $\mathcal{O}(V + E)$ все мосты.

11. **dfs и веса**
    В стране n аэропортов. Самолёт может сделать перелёт из аэропорта i в аэропорт j, израсходовав $w_{ij} > 0$ горючего. При этом w_{ij} может отличаться от w_{ji}, и $w_{ii} = 0$. Найдите минимальный размер бака, позволяющий добраться самолёту из любого города в любой, возможно с дозаправками.

12. **3-связность**
    Проверить граф на рёберную 3-связность за $\mathcal{O}(VE)$.

13. **(*) Нельзя не пройти**
    Найти в орграфе все вершины, через которые проходит любой путь $a \rightsquigarrow b$. $\mathcal{O}(V + E)$.

6.2 Домашнее задание

1. **(2) Поиск цикла**
   Найти в неорграфе простой цикл через данную вершину за $\mathcal{O}(E)$.

2. **(3) Пути в дереве**
   Дано дерево $T = \langle V, E \rangle$.
   За $\mathcal{O}(V+E)$ вычислить для каждого ребра, сколько простых путей проходит через него.

3. **(3) Лексмин топсорт**
   Найдите лексикографически минимальный из всех топологических порядков. $V, E \leq 10^6$.

4. **(3) Обмен местами**
   Есть ориентированный граф. Для каждой пары вершин a, b определена функция $f(a, b)$. Вася и Петя стоят в вершинах v и p, соответственно, и хотят поменяться местам, не оказываясь ни в какой момент времени в паре вершин с $f(a, b) < d$. За какое минимальное число ходов они могут это сделать? Ход — один из них переходит в смежную вершину. $\mathcal{O}(VE)$.

Дополнительные задачи

1. **(3) Враги и двухпартийная система**
   У каждой вершины не более 3 врагов. Вражда – симметричное отношение. Разбить вершины на 2 доли так, чтобы с вершиной в долю попало не более 1 врага. $\mathcal{O}(V + E)$.

2. **(4) Дополнение до сильносвязного**
   Для заданного ориентированного графа G посчитать минимальное число рёбер, которые нужно добавить в граф, чтобы он стал сильно связным. Время $\mathcal{O}(V^3)$.

3. **(4) Центры дерева**
   Дано дерево $T = \langle V, E \rangle$. Обозначим через $d(u, v)$ длину пути между вершинами u и v.
   a) **(1)** Найдите за $\mathcal{O}(|V|)$ центр дерева — вершину c, для которой минимальна
   $$\sum_{v \in V} d(v, c)$$
   b) **(1)** Найдите за $\mathcal{O}(|V|^2)$ 2-центр дерева — пару вершин (a, b), для которой минимальна
   $$\sum_{v \in V} \min(d(v, a), d(v, b))$$
   c) **(2)** Найдите 2-центр за $\mathcal{O}(|V|)$.

6.3 Разбор практики

1. **Просто ориентируй**
   Пусть есть ребро (i, j). Пусть $i < j$. Направим ребро $i \to j$.

2. **Берегите деревья**
   Возьмём любое остовное дерево dfs. Все древесные рёбра вниз. Остальные вверх.

3. **Разве это не NP-трудно?**
   Динамика `f[v]` – «максимальный по длине путь, начинающийся в v».

4. **Единственный топсорт**
   Найдём какой-нибудь топсорт a. Проверим, что $\forall i$ есть ребро $a_i \to a_{i+1}$ (если нет, эти две вершины можно поменять местами). Заодно получили ещё одно решение предыдущей задачи.

5. **dfs всемогущий**
   `for (v ∈ A) dfs(v)`, где `dfs` ищет путь в `B`. Поскольку мы нигде не очищаем пометки, суммарное время работы всех `dfs` есть $\mathcal{O}(V + E)$.

6. **Чётность циклов**
   Будем красить вершины в два цвета (разбивать на две доли). Если видим ребро $v \to x$: $color[v] = color[x]$, увидели нечётный цикл. Чтобы восстановить, возьмём пути $start \to v$ и $start \to x$, обрежем общую часть. Как получить сами пути? Также, как в динамике, $\forall v$ по ходу `dfs` запоминаем $p[v]$ – откуда мы попали в v.

7. **В поисках простого цикла**
   Через ребро $a \to b$: `dfs(b)`, который ищет путь в a.
   Через вершину a: `dfs(a)`, который ищет путь в a.
   В неорграфе фокус в том, что как только «мы пришли в уже посещённую вершину», мы нашли цикл, остановим алгоритм. До этого события мы просмотрели/посетили не более n вершин и рёбер.

8. **Ценность времени**
   a – предок b, если $t_in(b) \in [t_in(a), t_out(a)]$.

9. **Телепортация в дереве**
   Динамика $h[v]$ – самая высокая в поддереве v, куда можем прыгнуть из v.

10. **Мосты**
    Можно почитать в любом конспекте по алгоритмам.

11. **dfs и веса**
    Бинпоиск по ответу. Внутри dfs.

12. **3-связность**
    Граф рёберно 3-связен $\Leftrightarrow$ при удалении любых двух рёбер он останется связным $\Leftrightarrow$ при удалении любого ребра он останется двусвязным. Заметим, что в остовном дереве для лишения связности придётся удалить хотя бы одно ребро. Пусти `dfs`, получим остовное дерево, переберём его рёбра, каждое за $\mathcal{O}(E)$ проверим. Кстати $E \geq V$, иначе граф не 3-связный.

13. **(*) Нельзя не пройти**
    ?

7 Кратчайшие пути

7.1 Практика

1. **Кратчайший путь через достопримечательности**

   Дан орграф. Найти кратчайший путь, проходящий по всем k выделенным вершинам. $k \leq 10$.

2. **k-bfs**

   Пусть в графе все ребра имеют целый вес из $[1, k]$. Придумайте, как найти кратчайшее расстояние от вершины s до остальных за $\mathcal{O}(k(V+E))$. А за $\mathcal{O}(kV + E)$?

3. **Число кратчайших путей**

   Дан орграф и выделенная вершина s, нужно для каждой вершины v найти число кратчайших путей из v в s. $\mathcal{O}(E \log V)$.

4. **Запросы к Роберту**

   Предподсчет за $\mathcal{O}(V^3)$ и запрос $\langle a, b, e\rangle$ за $\mathcal{O}(1)$ — существует ли кратчайший путь из a в b, проходящий через ребро e?

5. **Флойд против Беллмана**

   Для каждой вершины графа узнать, есть ли отрицательный цикл через эту вершину. $\mathcal{O}(V^3)$.

6. **Потенциалы**

   Пусть дан взвешенный граф G с циклами отрицательного веса. На вершинах этого графа определим функцию $\phi(v)$ — потенциал. Заменим вес каждого ребра $w(u, v)$ на $w'(u, v) = w(u, v) + \phi(u) - \phi(v)$. Докажите, что кратчайшим путям между двумя вершинами в графе с весами w' будут однозначно соответствовать кратчайшие пути в графе с весами w.

7. **Кратчайшие пути между всеми парами вершин**

   Пусть во взвешенном графе G нет циклов отрицательной стоимости. Докажите, что если в качестве потенциала взять кратчайшее расстояние от некоторой вершины s, то все веса w' получатся неотрицательными (если соответствующие расстояния конечны).

   Покажите, как найти матрицу расстояний в графе с отрицательными весами за $\mathcal{O}(VE + V^2 \log V)$.

8. **Откуда берутся графы?**

   Дана система из m неравенств на n переменных x_i.
   Каждое неравенство имеет вид $x_i - x_j \leq \delta_{ij}$.

   (a) Найти решение системы или сказать, что его не существует, за $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

   (b) Пусть все $\delta_{ij} \geq 0$, решить задачу за $o(n \cdot m)$. Слишком просто? Тогда $\sum_i x_i \to \max$.

9. **Расстояние – это не только сумма**

   Для каждой пары вершин в графе найти $w[a, b]$ – такой минимальный вес, что из a в b есть путь по рёбрам, вес которых не больше $w[a, b]$. $\mathcal{O}(V^3)$.

10. **Речной граф**

    Даны две параллельных прямых (река). В реке есть n островов (точек). Мы хотим провести по реке корабль, представляющий собой открытый круг радиуса R, так, чтобы он не задел ни одного острова. Найти максимальный R, при котором это еще возможно, за $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

11. **Обмен валют**

    Есть n валют и m обменников. i-й обменник предлагает менять валюту a_i на валюту b_i по курсу c_i/d_i. Можно ли, используя сколь угодно большие начальные сбережения и данные m обменников, сломать финансовую систему и бесконечно обогащаться? Считается, что у обменников есть бесконечное количество денег целевой валюты.

    (*) А теперь тоже самое с комиссией: x_i единиц валюты a_i перейдут в $(x_i - s_i)\frac{c_i}{d_i}$ единиц валюты b_i.

12. **Количество путей**

Найти количество путей (необязательно простых) в графе за $\mathcal{O}(V^3 \log k)$

a) между всеми парами вершин длины ровно k.
b) между парой вершин длины $\leq k$.

7.2 Домашнее задание

1. **Дерево Штайнера**

   Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Веса рёбер неотрицательны. В графе есть подмножество вершин T, которые мы назовем терминалами. Минимальное дерево Штайнера – это связный подграф графа G минимального веса, содержащий все терминалы. Требуется найти такой подграф и доказать, что он является деревом.

   (a) Доказать, что искомый подграф – дерево.

   (b) Пусть $|T| = 3$, решить за $\mathcal{O}(E \log V)$.

   (c) Пусть $|T| = 4$, решить за $\mathcal{O}(V^3)$.

   (d) `(*)`. Что делать, если в графе есть отрицательные рёбра? является ли всё ещё минимальный по весу подграф деревом?

2. **Расстояния в меняющемся графе**

   Нужно научиться на запрос «уменьшился вес ребра» за $\mathcal{O}(V^2)$ пересчитывать матрицу расстояний. Считайте, что в графе не было и не появилось отрицательных циклов.

Дополнительные задачи

3. **bfs и длинная очередь**

   Постройте матрицу $n \times n$, состоящую из клеток-стенок и пустых клеток, на которой при запуске `BFS` из какой-то клетки максимальный размер очереди будет $\omega(n)$. Ходить можно между клетками, смежными по стороне.

4. **Форд-Беллман и число итераций**

   Пусть на вершинах графа задан порядок: $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Пусть алгоритм Беллмана-Форда на каждой стадии рассматривает ребра в таком порядке: сначала ребра, ведущие из меньшей вершины в большую (в порядке возрастания номера исходящей вершины), а потом ребра, ведущие из большей вершины в меньшую (в порядке убывания номера исходящей вершины). Докажите, что если в графе нет циклов отрицательного веса, то алгоритм найдет все кратчайшие пути из v_1 за $\frac{n}{2}$ итераций.

5. **Форд-Беллман и число итераций 2**

   Продолжение задачи про улучшения Беллмана-Форда. Пронумеруем вершины в порядке случайной перестановки. Покажите, что матожидание числа итераций Беллмана-Форда есть $\frac{n}{3}$.

6. **Форд-Беллман и число итераций 3**

   Покажите, что на случайном графе ($a_i \in [1, n]$, $b_i \in [1, n]$, $w_i \in [1, C]$, все числа целые, генерируются равномерным распределением, C любая фиксирована один раз заранее) Форд-Беллману хватит $\mathcal{O}(\log V)$ итераций.

7. **Почему 5?**

   Дан неориентированный граф G. Посчитайте количество простых циклов длины 5. $\mathcal{O}(V^3)$.

8. **Почему без лога?**

   Дан орграф, посчитайте от начальной вершины до всех остальных кратчайшие расстояния относительно метрики «вес самого легкого ребра на пути». $\mathcal{O}(V + E)$.

9. **Максимально отрицательный цикл**

   Дан взвешенный орграф с положительными целыми весами, не превосходящими C. Найдите в нем цикл минимального среднего веса за $\mathcal{O}(VE \log C)$.

10. **Сумма двух**

    Есть взвешенный неограф. Найти путь из s в t такой, что сумма двух максимальных ребер на пути минимальна. $\mathcal{O}((V + E) \cdot \text{poly}(\log))$.

11. **Модульный граф**

    Пусть длина пути определяется как сумма весов всех ребер по модулю n. Найти кратчайший путь за $\mathcal{O}((V + E) \cdot n)$.

12. Рассмотрим граф, на каждом ребре которого написан нолик или единица. Каждому пути в этом графе соответствует некоторая бинарная строка. Строки сравниваются как двоичные числа (старшие разряды слева), среди одинаковых чисел меньше то, у которого меньше ведущих нулей. Для задачи нахождения кратчайших путей относительно такой метрики докажите корректность или приведите контрпример для алгоритма

    a) Флойда
    b) Дейкстры
    c) Беллмана-Форда

13. Для обычной функции расстояния алгоритм Беллмана-Форда при работе делает несколько стадий обновления всех ребер и находит расстояния от вершины A до всех остальных за $V - 1$ итерацию. Предположим, что на каждой стадии алгоритм обновляет рёбра согласно некоторому фиксированному порядку на множестве E, общему для всех стадий. Зададим новую «длину пути»: определим её равной минимальному весу ребра на этом пути. При инициализации положим расстояние от A до A равным бесконечности, а до остальных вершин неопределенным, релаксация из вершин с неопределённым расстоянием не проводится. Будет ли работать алгоритм Беллмана-Форда с так определенной длиной? Сколько итераций он сделает в худшем случае для направленного графа?

8 Остовные деревья

8.1 Практика

1. **Аэропутешествия**

   В стране n аэропортов. Самолет может сделать перелет из аэропорта i в аэропорт j, израсходовав w_{ij} горючего. При этом $w_{ij} = w_{ji}$, и $w_{ii} = 0$. Требуется найти минимальный размер бака, позволяющий добраться самолету из любого города в любой, возможно с дозаправками. Решить за $\mathcal{O}(n^2)$.

2. **Приближение коммивояжера**

   Найдите 2-приближение для задачи коммивояжера в графе с весами, удовлетворяющими неравенству треугольника.

3. **(*) СНМ для ленивых**

   Докажите, что СНМ только с эфристикой «сжатие путей» работает за амортизированный $\mathcal{O}(\log n)$ на запрос.

   Подсказка #1: используйте знания про лёгкие и тяжёлые рёбра.
   Подсказка #2: посмотрите как меняются размеры поддеревьев.

4. **Казалось бы, причём здесь СНМ?**

   У нас есть массив длины n, мы хотим выполнить m запросов вида «покрасить отрезок $[l_i, r_i]$ массива в цвет c_i» и вывести, что получилось в конце. Решите за $\mathcal{O}(n \log m)$.

   Подсказка: попытайтесь выполнять запросы, начиная с последнего.

5. **Алгоритм Борувки**

   Рассмотрим следующий алгоритм поиска минимального покрывающего дерева:

   `while (в графе больше одной вершины):`

   a) Для каждой вершины найдем самое легкое инцидентное ей ребро и добавим его в множество S (одно и то же ребро может быть выбрано дважды).
   b) Добавим все ребра из множества S в ответ.
   c) Стянем граф по ребрам из S.

   Докажите, что такой алгоритм найдет минимальное покрывающее дерево в случае, если веса всех ребер в графе различны, при этом время работы будет $\mathcal{O}(E \log V)$.

   Придумайте, как модифицировать алгоритм, если возможны равные веса.

   Ценность алгоритма по сравнению с Краскалом и Примом в том, что часто получается $\mathcal{O}(E)$. Постройте пример для алгоритма Борувки, на котором он делает $\Theta(1)$ фаз.

   Занимательный факт. Борувка в худшем случае работает за $\mathcal{O}(E \log_{E/V} V)$.
   Обычные Прим и Краскал дольше. Прим с d-ичной кучей внутри столько же.

6. **Минимальный цикл**

   Найти во взвешенном неорграфе такой цикл, что максимальный вес ребра этого цикла минимален. $\mathcal{O}((V + E) \log E)$.

7. **MST в меняющемся графе**

   Дан взвешенный связный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ и некоторое минимальное остовное дерево на нём. Пусть некоторого ребра $e \in E$ изменился вес. По графу, остовному дереву, ребру e и его новому весу найдите новое минимальное остовное дерево за $\mathcal{O}(V + E)$.

8. **Единственность MST**

   a) Пусть все ребра графа имеют различный вес. Докажите, что минимальное покрывающее дерево единственно.
   b) Проверить, что минимальное по весу остовное дерево единственно. $\mathcal{O}(E \log V)$.

9. **Два различных MST**

   Пусть дан взвешенный неорграф с неединственным минимальным остовным деревом. Найдите два различных минимальных остова графа.$\mathcal{O}(E \log V)$.

10. **Второе по минимальности MST**

    Найдите за полиномиальное время второе по весу остовное дерево в неографе.

11. **(*) Все деревья связаны**

    Пусть дан взвешенный связный неорграф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенной вершиной s. Все веса положительны и различны. Могут ли какое-либо минимальное покрывающее дерево в G и какое-либо дерево кратчайших путей из s не иметь ни одного общего ребра? Если да, приведите пример. Если нет, докажите, что такого не может быть.

8.2 Домашнее задание

1. **Второе по минимальности MST**

   Найдите за $\mathcal{O}(V^2 + E)$ второе по весу остовное дерево в неографе.

   Указание: улучшите версию решения с практики с попыткой добавить новое ребро в дерево. Мы ещё не знаем заклинания «LCA!» пользоваться им нельзя. Есть простое решение с использованием только известной вам теории.

2. **Краскал наоборот**

   Пусть дан связный взвешенный неорграф, будем рассматривать его ребра в порядке невозрастания веса и удалять текущее ребро, если связность графа при этом не нарушается. Докажите, что этот алгоритм находит минимальный остов, или придумайте контрпример.

3. **Насколько сжатие путей быстрое?**

   Доказать, что СНМ с одной эвристикой сжатия пути, к которому поступают следующие запросы «сперва только `join`-ы вида `p[root] = x` (где `root` – именно корень, а `x` – любая вершина другого множества), затем только `get`-ы», работает за $\mathcal{O}(n + m)$, где n – число элементов, m – суммарное число запросов.

4. **Сжатие путей и максимум на пути в дереве**

   Дано дерево из n вершин, с весами на рёбрах. Даны m вертикальных путей (путь $a \to b$ вертикальный, если b – предок a). Посчитайте на каждом вертикальном пути максимум весов рёбер. $n, m \leq 10^6$.

   Указание #1: считайте почти «в лоб», но используйте сжатие путей (похоже на задачу с практики).
   Указание #2: важно пользоваться тем, что задача offline (вам сразу даны все пути), а не поступают по одному (online).

Дополнительные задачи

1. **Сумма трёх рёбер**
   Есть взвешенный неорграф. Найти путь из s в t такой, что сумма трёх максимальных ребер на пути минимальна. $\mathcal{O}((n + m) \cdot poly(\log))$.

2. **Ориентированное остовное дерево**

   Дан взвешенный орграф, постройте ориентированное к корню остовное дерево с корнем в вершине 1 минимального веса. За полином.

3. **Второе остовное дерево lvl. 2**
   Дан взвешенный связный неорграф G, вес его минимального остова равен w. Найдите за полиномиальное время минимальный по весу среди таких остовов G, вес которых строго превосходит w.

4. Дан взвешенный граф с положительными весами, в вершинах его стоят числа. Требуется доставить все числа в вершину 0. За то, чтобы провести число a по ребру веса w надо заплатить сумму aw. Если два числа находятся в одной вершине, то их можно слить, заменив на максимум. Постройте алгоритм доставки, дающий константное приближение к оптимальному ответу за полиномиальное время.

9 Потоки и разрезы

9.1 Практика

1. Дан двудольный граф. Каждой вершине сопоставлено число a_v.
   (a) Выберите максимальное количество рёбер так, чтобы степени вершин были не более 1.
   (b) Выберите максимальное количество рёбер так, чтобы степени вершин были не более a_v.

2. Даны девочки, мальчики и собачки. Для каждой пары "мальчик, девочка" известно, хочет ли девочка дружить с мальчиком. Для каждой пары "собачка, девочка" известно, нравится ли собачка девочке. Нужно максимальному количеству девочек выделить по мальчику и собачке так, что:
   - Каждый мальчик не более чем с одной девочкой.
   - Каждая собачка не более чем у одной девочки.
   - Тройки гармоничны: девочка и хочет дружить с выбранным ей мальчиком, и собачка ей нравится.

3. Дан неориентированный граф. Необходимо ориентировать его так, чтобы максимальная исходящая степень была минимальна.
   (a) $\mathcal{O}(E^2 \log V)$
   (b) $\mathcal{O}(E^2)$

4. По правилам футбольного турнира в каждом матче должна победить одна из команд, то есть, не бывает 'ничьих'. Вам дана матрица уже сыгранный матчей. Можно ли так доиграть турнир, чтобы каждая команда выиграла заданное число раз? Каждая команда играет с каждой, для каждой команды известно, сколько игр она выиграла.

5. Рассмотрим ориентированный граф. За одно действие можно удалить все входящие в вершину i ребра за стоимость $a_i \geq 0$, или все исходящие из вершины i рёбра за стоимость $b_i \geq 0$. Необходимо удалить все рёбра графа за минимальную стоимость.

6. Каждой вершине ориентированного графа сопоставлено число (не обязательно положительное) — её вес. Найдите замкнутое подмножество вершин максимальной суммарной стоимости. Подмножество вершин называется замкнутым, если из него не исходят рёбра в другую часть графа.

7. Есть заказы и инструменты. Для каждого заказа известен список инструментов, который нужен, чтобы его выполнить. Каждый инструмент сделан умелыми японскими рабочими, поэтому бесконечно прочный, его можно один раз купить и много раз использовать. У каждого инструмента есть цена p_i. У каждого заказа есть прибыль, которую можно получить, выполнив заказ. Вы – бедный китайский рабочий. У вас изначально нет инструментов, но зато вы можете под нулевой процент в банке взять сколь угодно большой кредит, чтобы купить инструментов.
   (a) Вопрос: какую максимальную прибыль вы можете получить?
   (b) А теперь тот же вопрос, но ещё есть разные скидочные предложения!
   Скидка позволяет два инструмента i, j купить по специальной цене d: $\max(p_i, p_j) < d < p_i + p_j$. Каждый инструмент присутствует не более чем в одном скидочном предложении.

8. Есть ориентированный граф с начальной и конечной вершинами. В начальной вершине есть K грузовиков. Грузовикам нужно попасть в конечную вершину. Время дискретно. За единицу времени каждый грузовик или стоит на месте, или перемещается в одну из соседних вершин. В любой вершине могут одновременно стоять несколько грузовиков. По любому из рёбер в каждый момент времени должен ехать не более чем один грузовик. Минимизируйте время, когда все грузовики окажутся в конечной вершине.
   (a) $\mathcal{O}(poly(V, E, K))$
   (b) $\mathcal{O}(K(V + K)E)$

9.2 Домашнее задание

1. Разбейте вершины ориентированного графа на циклы. Т.е. каждая вершина должна быть покрыта ровно одним циклом. Либо скажите, что это невозможно. $\mathcal{O}(EV)$.

2. Дан граф и выделенные вершины s, t. Нужно проверить, правда ли существует единственный минимальный s-t разрез.

   (a) $\mathcal{O}(poly(V, E))$

   (b) $\mathcal{O}(E)$ при условии, что нам уже известен максимальный поток (сам поток, не только его величина).

3. В неориентированном графе без кратных рёбер необходимо удалить минимальное число рёбер так, чтобы увеличилось количество компонент связности.

   (a) $\mathcal{O}(V \cdot Flow)$, где $Flow$ — время работы какого-нибудь алгоритма поиска максимального потока.

   (b) $\mathcal{O}(E^2)$.

4. *(только группа Серёжи)* Есть ориентированный граф с начальной и конечной вершинами. В начальной вершине есть K грузовиков. Грузовикам нужно попасть в конечную вершину. Время дискретно. За единицу времени каждый грузовик или стоит на месте, или перемещается в одну из соседних вершин. В любой вершине могут одновременно стоять несколько грузовиков. По любому из рёбер в каждый момент времени должен ехать не более чем один грузовик. Минимизируйте время, когда все грузовики окажутся в конечной вершине.

   (a) $\mathcal{O}(poly(V, E, K))$

   (b) $\mathcal{O}(K(V + K)E)$

5. *(только группа Влада)* Есть заказы и инструменты. Для каждого заказа известен список инструментов, который нужен, чтобы его выполнить. Каждый инструмент сделан умелыми японскими рабочими, поэтому бесконечно прочный, его можно один раз купить и много раз использовать. У каждого инструмента есть цена p_i. У каждого заказа есть прибыль, которую можно получить, выполнив заказ. Вы – бедный китайский рабочий. У вас изначально нет инструментов, но зато вы можете под нулевой процент в банке взять сколь угодно большой кредит, чтобы купить инструментов.

   (a) Вопрос: какую максимальную прибыль вы можете получить?

   (b) А теперь тот же вопрос, но ещё есть разные скидочные предложения!
   Скидка позволяет два инструмента i, j купить по специальной цене d: $\max(p_i, p_j) < d < p_i + p_j$. Каждый инструмент присутствует не более чем в одном скидочном предложении.

   Подсказка: возможно, поможет одна из задач с практики.

Дополнительные задачи

1. Пусть алгоритм Форда-Фалкерсона ищет дополняющие пути `DFS`-ом с фиксированным порядком просмотра рёбер в каждой вершине, и пропускает максимум по найденному дополняющему пути. Постройте вместе с порядком ребер (или докажите, что такого не существует) ориентированный граф:

   (a) с целочисленными пропускными способностями, на котором алгоритм работает за экспоненту от V (пропускные способности могут быть большими, но должны быть полиномиальной суммарной длины).

   (b) с вещественными пропускными способностями, на котором алгоритм не завершается за конечное количество шагов.

   (c) с вещественными пропускными способностями, на котором алгоритм не сходится к корректному значению величины максимального потока.

2. Дана укладка неориентированного планарного графа: вершинам сопоставлены точки на плоскости, рёбрам — непересекающиеся отрезки между вершинами. У рёбер есть пропускные способности. Даны две вершины s и t, лежащие на одной грани. Требуется за $\mathcal{O}(\texttt{Dijkstra})$ найти величину максимального потока из s в t.

3. Какое максимальное количество уголков можно разместить на шахматной доске $n \times m$ с дырками? Уголком называется фигура, состоящая из трех клеток: центральная клетка черного цвета и две соседних с ней белых клетки со смежными сторонам.

10 Бинарные деревья поиска

10.1 Практика

1. `lower_bound`
   Как реализовать `next(x)`, `lower_bound(x)` в BST за $\mathcal{O}(h)$?

2. **Объединение AVL**
   Пусть вам даны два AVL-дерева T_1 и T_2. Придумайте, как построить AVL-дерево T, являющееся объединением деревьев T_1 и T_2 за время:

   (a) $\mathcal{O}(height(T_1) \times size(T_2))$, если $size(T_1) \geq size(T_2)$.

   (b) $\mathcal{O}(size(T_1) + size(T_2))$

3. **k-min**
   Как вывести k минимальных элементов в AVL-дереве за $\mathcal{O}(k)$?
   А для произвольного BST?

4. **Минимум на отрезке**
   Улучшите BST, хранящее пары $\langle x_i, y_i \rangle$: научите его находить $\min y_i \colon L \leq x_i \leq R$ за $\mathcal{O}(h)$.

5. **Операции над AVL**

   a) Удаление за $\mathcal{O}(\log n)$.
   b) Пусть `root.l.h = root.r.h + 3`. Как перебалансировать дерево за $\mathcal{O}(1)$?
   c) Пусть `root.l.h = root.r.h + k`. Как перебалансировать дерево за $\mathcal{O}(k)$?
   d) Merge за $\mathcal{O}(\log n)$ (два способа).
   e) Split за $\mathcal{O}(\log^2 n)$. `(*)` за $\mathcal{O}(\log n)$.
   f) `(*)` Уменьшите количество дополнительной информации до двух бит на вершину.

6. **Быстрый отсортированный массив** Нужно быстро выполнять запросы:

   - `get_ith_element(i)` (i-й по величине элемент);
   - `get_position(x)` (номер элемента в отсортированном массиве);
   - `add(i, x, y)` (вставить x на i-ю позицию; гарантируется, что $S[i-1] < x < S[i]$);
   - `del(i)` (удалить элемент на i-й позиции).

7. **Быстрый массив** Нужно быстро выполнять запросы: `get(i)`, `set(i, y)`, `insert(i, y)` (вставить x после i-го элемента), `del(i)`, `rotate(k)` (циклический сдвиг на k элементов).

8. **Модификации отрезка**

   a) Запросы: `insert(i, x)`, `del(i)`, `get_sum(l, r)`, `set(l, r, value)`.
   b) Добавим запросы `reverse(l, r)` и `rotate(k)`.

9. Покажите, что любые два корректные дерева поиска, построенные на одном и том же множестве ключей, можно получить друг из друга последовательностью поворотов.

10.2 Домашнее задание

1. Покажите, что:

   (a) Добавление в AVL-дерево требует $\mathcal{O}(1)$ вращений.

   (b) Удаление из AVL-дерева может потребовать $\Omega(\log n)$ вращений.

2. **Точка в стакане**
   Дано множество точек на плоскости. Нужно быстро обрабатывать запросы:
   • добавить/удалить точку,
   • вывести любую точку внутри области $d_i \leq y \leq u_i, x \leq r_i$.

3. Рассмотрим обычное несбалансированное BST. Если делать добавление в лоб спуском вниз, время работы на один запрос добавления может быть $\Omega(n)$. В процессе мы можем поддерживать для каждой вершины ссылки на детей и отца, а также глубину вершины (расстояние до корня). Научитесь делать ту же самую работу – поддерживать для каждой вершины детей, отца, глубину быстрее, а именно за $\mathcal{O}(\log n)$ на один запрос добавления.

4. Запросы online за $\mathcal{O}(\log n)$:

   - добавить пару $\langle x, y \rangle$
   - посчитать сумму y по всем таким парам, что $l \le x \le r$
   - посчитать сумму x по всем таким парам, что $l \le y \le r$

5. Придумайте структуру данных, поддерживающую упорядоченный по значению список S целых чисел, которая умеет отвечать на запросы:

   - `insert(x)` — вставить x в S, если его там не было.
   - `delete(x)` — удалить x из S, если он там был.
   - `S[k]` — вернуть k-тый по порядку элемент из S (то есть это k-я порядковая статистика множества).
   - `pos(x)` — вернуть k такое, что $S[k] = x$ (или $\varnothing$, если такого нет).

   Каждый запрос должен обрабатываться за $\mathcal{O}(\log |S|)$.

10.3 Дополнительные задачи

1. Дано корневое дерево, на вершинах которого могут быть пометки. Запросы: пометить вершину, снять пометку с вершины, число помеченных вершин в поддереве. Предобработка за $\mathcal{O}(n)$, online-запросы за $\mathcal{O}(\log n)$.

2. Дан невыпуклый несамопересекающийся многоугольник из n вершин.

   (a) Даны m точек. За $\mathcal{O}((m + n) \log n)$ для каждой точки определить, внутри она или снаружи.

   (b) Используя предподсчёт за $\mathcal{O}(n \log n)$ научиться в online по точке за $\mathcal{O}(\log n)$ определять, внутри она или снаружи.

3. Постройте тест, на котором недо-AVL-дерево, которое делает только малые вращения, делает $\omega(n \log n)$ операций после n запросов.

   Формально: изначально дерево пусто, нужно n раз вызвать `add(root,` x_i`)` для некоторой последовательности x_i, что суммарное время работы $\omega(n \log n)$.

   Либо докажите, что такого теста нет.

11 Поиск подстроки в строке

11.1 Практика

1. **Периоды строки**

   Найдите все периоды строки. $\mathcal{O}(n)$.

2. **Различные подстроки**

   Найдите число различных подстрок строки.

   а) Используя минимум кода и стандартные структуры данных. $n \leq 100$.

   б) За $\mathcal{O}(n^2)$.

3. **Суффиксный массив**

   Дана строка. Отсортируйте все её суффиксы по возрастанию за $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.

4. **Позиция в суффиксном массиве**

   Найдите позицию строки в ее суффиксном массиве. $\mathcal{O}(n)$.

5. **Закрепление**

   Придумайте, как про строку s детерминировано проверить за $\mathcal{O}(|s|)$, что она лексикографически не больше любого ее циклического сдвига.

6. **Одна ошибка**

   Научиться искать образец в строке, если допустимо различие в один символ между образцом и найденной подстрокой. $\mathcal{O}(n + m)$.

7. **Две ошибки**

   Научиться искать образец в строке, если допустимо различие в два символа между образцом и найденной подстрокой. $\mathcal{O}(n + m)$.

8. **Общая подстрока**

   a) Найти наибольшую общую подстроку двух строк. $\mathcal{O}(n \log n)$.
   b) Найти наибольшую по длине строку, которая дважды без перекрытий встречается в заданной строке. $\mathcal{O}(n \log n)$.

9. **Хеши циклических сдвигов**

   Придумайте для строки длины n предподсчет за $\mathcal{O}(n)$, позволяющий вычислить за $\mathcal{O}(1)$ полиномиальный хеш любого циклического сдвига.

10. **(*) Немного конструктива**

    За $\mathcal{O}(n)$ построить строку с данной Z-функцией.

11. **(*) Строки в дереве**

    Дано подвешенное дерево, на ребрах которого написаны непустые строки суммарной длины n, и образец p (все над алфавитом Σ). Найдите все соответствующие вхождениям p отрезки вертикальных путей за $\mathcal{O}(n + |p| \cdot |\Sigma|)$.

11.2 Домашнее задание

Во всех задачах можно использовать
префикс-функцию, Z-функцию, хеш-таблицы, хеширование строк.

1. **Префиксы префиксов**

   Для каждого префикса строки найти количество его префиксов, равных его суффиксу. $\mathcal{O}(n)$.

2. **Почти равенство**

   Дана строка длины n и образец длины m над алфавитом Σ. Найдите образец в строке за $\mathcal{O}(n + m + |\Sigma|)$, если допустимо в образце применять к алфавиту:

   a) циклический сдвиг алфавита.
   b) произвольную перестановку алфавита.
   c) произвольную перестановку алфавита и произвольную перестановку символов искомого образца.

3. **Из Z в префикс**

   Преобразовать Z-функцию в префикс-функцию без промежуточного восстановления строки. $\mathcal{O}(n)$.

4. **Подпалиндромы**

   Придумайте для строки длины n предподсчет за $\mathcal{O}(n)$, позволяющий за $\mathcal{O}(1)$ проверить для любой подстроки, является ли она палиндромом.

   Найдите количество подпалиндромов строки. $\mathcal{O}(n \log n)$.

11.3 Дополнительные задачи

1. **Тандемный повтор**

   ttt Тандемным повтором называется любая строка повторённая два раза. Дана строка, найти в ней самый длинный тандемный повтор. Пример `xabcabcxy` $\rightarrow$ `abcabc`.

2. **Немного конструктива**

   За $\mathcal{O}(n)$ построить строку с данной префикс-функцией.

3. **Мартышка пишет Войну и Мир**

   За одну секунду в конец изначально пустого текста дописывается случайная буква (равномерное распределение). Какое матожидание времени T, когда первый раз s станет подстрокой выписанного текста? $|s| \leq 10^4$.

11.4 Разбор практики

3. **Суффиксный массив**

   Суффикс описывается позицией начала. Суффиксный массив – массив целых чисел, позиций начал суффиксов. Простейший способ построения:

```
1  bool pless(int i, int j) { // правда ли, что i-й суффикс меньше j-го
2    int k = 0;
3    while (s[i+k] == s[j+k] && s[i+k]) // O(n) - пропустили одинаковую часть
4      k++;
5    return s[i+k] < s[j+k]; // O(1) - сравнили первые не равные символы
6  };
7  sort(p, p + n, pless); // O(n log n) · O(n)
```

   С помощью хешей мы умеем за $\mathcal{O}(1)$ проверять строки на равенство $\Rightarrow$
   линейный поиск k можно заменить на бинпоиск по k и получить компаратор за $\mathcal{O}(\log n)$.

12 Хеширование

12.1 Практика

Алгоритмы в данной серии задач вероятностные, то есть могут ошибаться с вероятностью $\frac{1}{100}$.

1. **Максимальный подпалиндром**

   Найти максимальный подпалиндром строки. $\mathcal{O}(n)$.

2. **Равенство меняющихся строк**

   Нужно уметь быстро отвечать на запросы: поменять символ в строке, проверить равенство двух подстрок. *Для группы Серёжи ещё «вставить символ в середину строки».*

3. **Вертикальная симметрия**

   а) На плоскости даны n точек $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$.
   Проверьте за $\mathcal{O}(n)$, есть ли у них вертикальная ось симметрии.

   б) Точки добавляются удаляются. После каждого изменения за $\mathcal{O}(\log n)$ проверять симметрию.

4. **Словари и пары**

   Пусть ваш язык программирования имеет встроенный ассоциативный массив `int64` $\to$ `int`.
   Пример для `C++`: `unordered_map<int64_t, int> m; m[2] = 3;`
   Пример для `Python`: `m = {}; m[2] = 3`

   Пользуясь только функциональностью, описанной выше, добавьте в свой язык ассоциативный массив от (а) пары двух 32-битных целых, (б) пары двух 64-битных целых.
   Оцените вероятность ошибок.
   Как поддерживать 64-битные хеши?

5. **Подматрица в матрице**

   Даны два двухмерных массива A и B – большая картинка и маленькая картинка.
   Найдите точное совпадение B с подпрямоугольником A. За $\mathcal{O}(|A|)$.

6. **Сортировка строк**

   Дан набор строк суммарной длины n над алфавитом Σ.

   a) Отсортируйте за время $\mathcal{O}(n \log |\Sigma|)$ с помощью бора.
   b) Покажите, что за $\mathcal{O}(n)$ нельзя (и обсудите, что на самом деле это не правда).

7. **Разбиение текста**

   Дан словарь слов суммарной длины L и текст T. Длины слов в словаре не более l. Представьте текст в виде конкатенации минимального количества словарных слов.
   Слова можно использовать более одного раза.

8. **Все вхождения всех слов**

   Даны текст t и словарь A.

   a) Найдите суммарное вхождение всех слов в текст. За $\mathcal{O}(|t| + |A|)$.
   b) Для каждого словарного слова найдите количество вхождений в текст. За $\mathcal{O}(|t| + |A|)$.

9. **Web-поиск**

   Дана строка t. В online поступают строки-запросы s_i.
   Для каждого запроса найдите, где в t встречается s_i, как подстрока. $|t| \le 10^5, \sum |s_i| \le 10^6$.

10. **Суффиксное дерево**

    Положите все суффиксны t в бор и решите предыдущую задачу.

11. **Универсальные и независимые**

Семейство хэш-функций $\mathcal{H} = \{h : X \to Y\}$ называется универсальным, если:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 : \underset{h \in \mathcal{H}}{\mathbf{Pr}} [\ h(x_1) = h(x_2)\ ] \leq \frac{1}{|Y|}$$

Семейство хэш-функций $\mathcal{H} = \{h : X \to Y\}$ называется k-независимым, если
$\forall$ различных $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$, и $\forall$, возможно, совпадающих $y_1, y_2, \cdots, y_k \in Y$ выполняется:

$$\underset{h \in \mathcal{H}}{\mathbf{Pr}} \left[\bigwedge_{i=1}^{k} h(x_i) = y_i \right] = \frac{1}{|Y|^k}$$

a) Докажите, что любое 2-независимое семейство хэш-функций является универсальным.
b) Докажите, что любое $k+1$-независимое семейство хэш-функций является k-независимым.

12. **(*) Поиск строки в дереве**

Даны бор A и строка s. Нужно вернуть вершину бора v, от которой строку s можно отложить вниз. Размер алфавита $\mathcal{O}(1)$. Время $\mathcal{O}(|A| + |s|)$.

13. **(*) Строка Туэ-Морса**

Определим следующую последовательность строк:

- $S_1 = 0$
- $S_2 = 01$
- $S_3 = 0110$
- $S_n = S_{n-1}(\neg S_{n-1})$

Заметим, что каждая строка является префиксом всех следующих.
Пусть требуется вычислить полиномиальный хеш от S_n для некоторого n.
Докажите, что если результат полиномиального хеширования вычисляется по модулю 2^{64}, то вне зависимости от выбранной точки для полинома $hash(S_{12}) = hash(\neg S_{12})$.

12.2 Домашнее задание

Определение. *Семейство хеш-функций $\mathcal{H} = \{h : X \to Y\}$ называется*

- *универсальным, если:*

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 : \underset{h \in \mathcal{H}}{\boldsymbol{Pr}} [\, h(x_1) = h(x_2) \,] \leq \frac{1}{|Y|}$$

- *k-независимым, если для любых различных $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$, для любых, возможно, совпадающих $y_1, y_2, \cdots, y_k \in Y$ выполняется:*

$$\underset{h \in \mathcal{H}}{\boldsymbol{Pr}} \left[\bigwedge_{i=1}^{k} h(x_i) = y_i \right] = \frac{1}{|Y|^k}$$

1. **Бесконечно несловарное слово**

   Дан словарь слов суммарной длины L над алфавитом Σ. За время $\mathcal{O}(L \cdot |\Sigma|)$ определите, существует ли бесконечная строка, не содержащая ни одно словарное слово как подстроку.

   Пользуйтесь полным автоматом унаследованным от Ахо и Корасик.

2. **Поиск с k ошибками**

   Научиться искать образец s в строке t, если допустимо различие в k символов между образцом и найденной подстрокой. $\mathcal{O}(|t|k \log |s|)$.

3. **T9**

   Есть словарь. У каждого слова есть «частота использования» изначально равная 1.

   Придумайте структуру данных, которая поможет обрабатывать два запроса

   a) Пользователь ввёл словарное слово w, увеличить его частоту на 1.
   b) Пользователь ввёл строку s и хочет увидеть 5 самых частых слов, начинающихся на s.

   Суммарная длина всех слов в словаре и всех запросов не более 10^6.

4. **Семейства функций**

   a) Сколько существует различных функций $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$?
   b) Для каких n и m семейство всех функций $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$ является универсальным? 2-независимым?
   c) Может ли существовать конечное универсальное семейство функций $X \to \mathbb{F}_2^m$, если X бесконечно?

12.3 Дополнительные задачи

1. **Изоморфизм деревьев**

   Пусть даны два корневых дерева, большое T и маленькое t, и идеальная хеш-функция из списка целых чисел в целое число. Требуется найти такую вершину x дерева T, что поддерево, индуцированное вершиной x, и t изоморфны.

   (a) При проверке на изоморфизм порядок детей важен. $\mathcal{O}(n)$.
   (b) При проверке на изоморфизм порядок детей не важен. $\mathcal{O}(n \log n)$.
   (c) При проверке на изоморфизм порядок детей не важен. $\mathcal{O}(n)$.

2. **Полиномиальные хеши универсальны?**

   Пусть модуль m, по которому берется многочлен в полиномиальном хешировании не фиксирован, а выбирается случайно равновероятно из некоторого конечного набора простых чисел. Пусть константа x для полиномиального хеширования выбирается равновероятно из множества $\{1, 2, \ldots, m-1\}$. Докажите, что такое семейство полиномиальных хеш-функций не является универсальным.

3. **Максимальный рефрен**

   Повторяемостью s в t назовём $|s| \cdot cnt(s, t)$, где $cnt(s, t)$ – количество вхождений s в t. Дана $t, |t| \leq 10^5$, найдите s с максимальной повторяемостью.

13 Алгебра

13.1 Практика

1. **Кто поможет?**

   У Пети есть выражение длины n из чисел, скобок, знаков `+`, `-`, `*`.
   Известно, что ответ – десятичное число длины не более k.
   Помогите Пете посчитать ответ за $\mathcal{O}(nk + k^3)$. А за $\mathcal{O}(nk + k^2)$?

2. **Евклид и компактность**

   Докажите, что если расширенного Евклида запустить для a и b типа `int64`, не произойдёт переполнений.

3. **Евклид и полезность**

   Лягушонок Вася живёт на прямой. Он умеет целеустремлённо прыгать только вперёд.
   Устройство лапок позволяет прыгать ему только на a или b вперёд.
   Может ли он попасть в точку c?

4. **Эра фена**

   Дано $n \leq 10^6$. Для каждого x от 1 до n узнайте всё про него.

   a) Простое ли?
   b) Самый маленький простой делитель?
   c) Сколько делителей?
   d) $\varphi(x)$?

5. **Длинный gcd**

   Заметим, что $gcd(2a, 2b) = 2gcd(a, b)$ и, если a — нечетное число, то $gcd(a, 2b) = gcd(a, b)$.
   Придумайте алгоритм вычисления `gcd` за $\mathcal{O}(n^2)$.

6. **Рекурсивная факторизация**

   Пусть дана процедура $fact(n)$, работающая за n^α, которая возвращает любой нетривиальный делитель n или -1, если n простое. Покажите, как факторизовать n на простые за $\mathcal{O}(fact(n))$?

7. **Факторизация через gcd**

   Дано число n, a и b. Известно, что $a^2 = b^2 \bmod n$ и $a \neq \pm b \bmod n$.
   Найдите нетривиальное разложение n на множители.

8. **Крайчик подкрадывается**

   a) Дано множество чисел A и их факторизации на простые. Выбрать $S \subseteq A$ такое, что произведение чисел из S есть полный квадрат.

   b) Число a называется b-гладким, если
   раскладывается в произведение степеней первых b простых чисел (т.е. $a = \prod_{i=1}^{b} p_i^{\alpha_i}$).
   Пусть в задаче (a) числа в A случайные. Придумайте, как улучшить решение (a).

   c) Пусть есть n. Рассмотрим $n_1 = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Рассмотрим $A = \{(n_1 + i)^2 \bmod n \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$.
   Используя знания выше и пользуйясь предыдущими задачами, придумайте, как разложить n на простые.

9. **Битые сектора**

   Есть множество $A \subseteq [n]$ и k ячеек, каждая из которых умеет хранить $\mathcal{O}(\log n)$ бит информации.
   В каждый момент времени максимум t из k ячеек могут оказаться недоступны (мы можем узнать про ячейку, доступна ли она, и, если доступна, прочитать данные). Требуется организовать такой способ хранения информации, чтобы в любой момент времени можно было востановить множество A.

   a) $k = (t + 1) \cdot |A|$.

b) $k = t + |A|$ при $t = 1$.
c) $k = t + |A|$.

10. **RSA и реальный мир**

    Пусть вам нужно переслать сообщение длины 100 мегабайт другу по открытому каналу. Как поступить?

11. **RSA и простота**

    Пусть оказалось, что сообщение, шифруемое RSA, не взаимно просто с n. Сломается ли процедура шифрования/дешифрования? Чем плохо такое сообщение?

12. **Кто взломает RSA?**

    Аня решила послать приглашение на секретную вечеринку Боре, Ване и Гоше. Аня разослала им одинаковый текст приглашения M закодированный с помощью RSA. У Вани, Бори и Гоши выбраны различные n, но ключ e у всех одинаковый: $e = 3$. Придумайте, как Дима сможет узнать (за полиномиальное от суммы длин всех чисел время), где будет происходить секретная вечеринка, если ему доступны все три шифрованных приглашения и открытые ключи.

13. **Гаусс и прямоугольная магия**

    Дана матрица A размера $n \times m$ над конечным полем, $n < m$. Найдите матрицу B размера $m \times n$ такую, что $A \cdot B = I_{n \times n}$.

14. **Цэшки по модулю**

    Для заданных n, k и простого p посчитайте за линейное время $\binom{n}{k} \bmod p$. Учтите, что p может быть меньше, чем n. Можно считать, что все операции в $\mathbb{Z}_p$ выполняются за $\mathcal{O}(1)$.

13.2 Домашнее задание

1. **Первообразный корень**

   Малая теорема Ферма говорит, что $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ (p простое).
   Обозначим $\mathrm{ord}(a) = \min x > 0 \colon a^x \equiv 1 \bmod p$.

   $g \colon \mathrm{ord}(g) = p{-}1$ называют первообразным корнем

   Даны простое p и z ($0 < z < p$).

   a) Подумайте, каким может быть $\mathrm{ord}(z)$?
   b) За сколько максимально быстро вы можете проверить, является ли z первообразным корнем?

2. **Корень k-й степени**

   Даны простое p и g – первообразный корень по модулю p.

   Пусть вам дан чёрный ящик `DiscreteLog(a)`, который для $a \neq 0$ возвращает $x \colon g^x \equiv a \bmod p$.

   Даны k, b. Решите уравнение $x^k \equiv b \bmod p$.

3. **Эратосфен и гладкость**

   Обозначим i-е по возрастанию простое число, как p_i.

   Назовём число b-гладким, если все его простые делители не превосходят p_b.

   Дано $n \leq 10^6$. Для каждого $b \leq n$ найдите количество b-гладких чисел от 1 до n.

4. **RSA и факторизация**

   Известны открытый ключ $(n, 3)$ и закрытый ключ (n, d) системы `RSA`.
   Известно, что n — произведение двух разных простых.
   Разложите n на множители. $\mathcal{O}(\mathrm{poly}(\log n))$.

13.3 Дополнительные задачи

1. **Взлом RSA с Оракулом**

   В распоряжении взломщиков оказался волшебный оракул, способный для любого открытого ключа (n, e) взломать 1% из возможных зашифрованных протоколом `RSA` сообщений (т.е. детерминированная функция, которая за $\mathcal{O}(1)$ успешно сопоставляет набору (n, e, y) такое число m, что $y \equiv m^e \pmod n$, на случайно выбранной сотой части всех возможных входов). Придумайте алгоритм, который взламывает любое сообщение со средним временем работы $\mathcal{O}(\mathrm{poly}(\log n))$.

2. **Расстояние**

   В d-мерном пространстве над $\mathbb{Q}$ даны точка и набор из k векторов — базис подпространства. Найдите расстояние от точки до подпространства. $\mathcal{O}(kd^2)$.

3. **Базис минимального веса**

   Дан набор векторов с весами, оболочка векторов совпадает со всем пространством. Выбрать из данных векторов базис минимального суммарного веса.

4. **Рождение рекурренты**

   Вы знаете, что последовательность $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ образована линейным рекуррентным соотношением с коэффициентами $1, 1 \colon a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$. Решим обратную задачу: дана последовательность длины n, найти минимальное k и k коэффициентов, задающие данную последовательность, как линейную рекуррентность.

14 NP-полные задачи

14.1 Практика

1. **Простая подстрока**

   Докажите, что задача о наибольшей общей подстроке лежит в классе P.

2. **Сложность факторизации**

   Перформулируйте задачу факторизации, чтобы ответ был булев.

   Докажите, что новая задача факторизации числа лежит в классе NP.

3. **КНФ и ДНФ**

   Запишите a XOR b в КНФ и ДНФ.

4. **Полные задачи**

   Докажите, что следующие задачи NP-полны

   (a) CIRCUIT-SAT: По данной булевой схеме проверить, выполнима ли она.

   (b) SAT: По данной булевой формуле в КНФ-виде проверить, выполнима ли она.

   (c) 3SAT: По данной булевой формуле в КНФ-виде, у которой каждый дизъюнкт содержит не более чем три литерала, проверить, выполнима ли она.

   (d) INDEPENDENT SET: Сформулируйте NP-задачу и докажите полноту.

   (e) VERTEX COVER: Сформулируйте NP-задачу и докажите полноту.

   (f) CLIQUE: Сформулируйте NP-задачу и докажите полноту.

   (g) 0-1 ILP: Целочисленное линейное программирование, где все переменные $0 \leq x_i \leq 1$.

   (h) HITTING SET. Дан набор множеств $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_3\}$ и число k. Требуется выяснить, есть ли такое множество H, что его размер не превышает k, и его пересечение с кжадым множеством из набора не пусто.

5. **NP и поиск независимого множества**

   Рассмотрим задачу о независимом множестве. Докажите, что если существует алгоритм, позволяющий за полиномиальное время ответить на вопрос: правда ли, что в заданном графе существует независимое множества размера n, то

   a) $\exists$ полиномиальный алгоритм, который строит независимое множество размера $\geq n$.
   b) $\exists$ полиномиальный алгоритм, который строит максимальное независимое множество.

6. **NP помещается в EXP**

   Докажите, что NP $\subseteq$ EXP.

7. **Классов много, они разные**

   a) Покажите, что DT$[n^2] \neq$ DT$[n^3]$.
   b) Покажите, что P $\neq$ EXP.

8. **Трудная – не значит полная**

   Приведите пример NP-трудной, но не NP-полной задачи.

9. **Игры с классами**

   Рассмотрим следующую игру:
   Дан ориентированный граф, каждому ребру которого сопоставлено целое число. На одной из его вершин стоит фишка. Два игрока ходят по очереди, каждый в свой ход может передвинуть фишку по ребру и заплатить противнику противнику сумму, соответствующую этому ребру. Будем считать, что первый игрок выигрывает, если существует стратегия, которая позволяет ему бесконечно обогащаться. Докажите, что $L = \{G \mid$ первый игрок выигрывает$\}$ лежит в NP $\cap$ coNP. Можно рассматривать только чистые стратегии.

10. **Простота и NP**

    PRIME $= \{x \mid x$ простое$\}$

    a) Покажите, что PRIME $\in$ coNP.
    b) Покажите, что PRIME $\in$ NP.

11. **Ослабленный 3SAT**

    Рассмотрим задачу 3SAT. Пусть каждый литерал входит в формулу не более чем 2 раза. Докажите, что даже такая задача NP-полна. Докажите, что, если каждый литерал входит в формулу не более чем один раз, то задача решается полиномиально.

14.2 Дополнительные задачи

1. Дана укладка планарного графа. Вершинам сопоставлены точки на плоскости, рёбра – отрезки между вершинами, рёбра не пересекаются. У рёбер есть пропускные способности. Граф неориентированный. Даны две вершины s и t, лежащие на одной грани.

   Задача: за $\mathcal{O}(Dijkstra)$ найти величину максимального потока из s в t.

2. Покажите, что P $\neq$ NP.

14.3 Какое еще домашнее задание??

Удачных экзаменов и вообще успехов в нелегком студенческом труде! И в жызни, когда она настанет)
Все зайчики :3