5 Упражнения на формальные степенные ряды

5.1. С помощью обыкновенных производящих функций найдите числовую последовательность a_n, удовлетворяющую равенству

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1, \qquad n \geqslant 0. \tag{1}$$

5.2. Получите явные выражения для коэффициентов обыкновенной производящей функции

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

5.3. С помощью производящих функций докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n, \qquad n \geqslant 0. \tag{2}$$

5.4. С помощью производящих функций докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}, \qquad n \geqslant 0.$$

5.5. С помощью производящих функций докажите тождество

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

5.6. С помощью производящих функций докажите тождество

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Указание. Рассмотрите интеграл

$$\int_0^1 \frac{1-z^n}{1-z}\, dz$$

и сделайте в нем замену переменной $s = 1 - z$.

5.7. Пусть $F(z) = 2e^z$ и $G(z) = 2e^z$ есть пара экспоненциальных функций, описывающих множества A и B. Предположим, что пересечение этих множеств описывается экспоненциальной функцией e^z. Чему равна экспоненциальная производящая функция, описывающая объединение этих двух множеств?

5.8. Докажите формулу

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \tag{3}$$

для чисел D_n с использованием принципа включений-исключений.

5.9. Дайте комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения

$$D_{n+1} = n\,(D_n + D_{n-1}) \quad \forall\ n > 1; \qquad\qquad D_0 = 1, \quad D_1 = 0. \tag{4}$$

5.10. Сосчитайте количество чисел, состоящих из n цифр, таких, что все цифры нечетные, а цифры 1 и 3 присутствуют в числе не менее одного раза.

5.11. Определите количество способов размещения n различимых для нас гостей по трем различным же столам при условии, что за первым столом должен сидеть хотя бы один гость, за вторым столом должно сидеть только нечетное, а за третьим — четное число гостей.

5.12. В футбольной команде n игроков. Тренер разбивает команду на две группы и просит каждую из групп выстроиться в линию. Затем он первой группе игроков раздает красные футболки. Во второй группе любой из игроков может выбрать футболку одного из трех цветов — оранжевую, белую или зеленую. Сколько существует различных способов совершить все эти действия?

5.13. Подсчитайте количество различных целочисленных решений уравнения

$$a + b + c = 6, \qquad -1 \leqslant a \leqslant 2, \quad 1 \leqslant b, c \leqslant 4.$$

5.14. Хорошо известно, что любое число можно единственным образом записать в двоичной системе счисления. Дайте комбинаторное доказательство данного факта на языке производящих функций.

5.15. Мы знаем, что при фиксированном параметре n производящая функция для чисел $\binom{n}{k}$ равна $(1+z)^n$. Чему равна обыкновенная производящая функция для этих чисел $\binom{n}{k}$ в случае, если мы вместо n зафиксируем параметр k? Можно ли записать для этих чисел экспоненциальную производящую функцию при фиксированном параметре k?

5.16. С помощью производящих функций мы показали, что существует 2^{n-1} способов раскладки n неразличимых предметов по заранее не фиксированному количеству различимых ящиков при условии, что в каждый из этих ящиков мы можем класть любое отличное от нуля количество предметов. Дайте комбинаторное доказательство этого факта.

5.17. Сколькими способами можно получить по различным предметам оценки 3, 4 и 5 так, чтобы их сумма равнялась десяти? А если предметов ровно три?

5.18. Рота из n солдат выстроена в шеренгу. Командир разбивает шеренгу в произвольном количестве мест, создавая тем самым несколько отрядов. После этого, часть отрядов он отправляет на дежурство. Сосчитайте количество способов совершить такие комбинаторные действия с использованием производящих функций.

5.19. Придумайте комбинаторное доказательство для результата, полученного при решении предыдущего упражнения.

5.20. На плацу стоят в одну линию n солдат. Дежурный офицер разбивает эту шеренгу на произвольное число k непустых отрядов, а затем назначает в каждом отряде командира. Подсчитайте с помощью производящих функций количество h_n способов совершить эту операцию.

5.21. В осеннем семестре у преподавателя n рабочих дней. Преподаватель может поделить семестр, состоящий из n дней, на две части, посвятив первую часть (первые k дней, $1 \leqslant k \leqslant n-2$)

теории, а вторую часть (последние $n-k$ дней) — практическим занятиям. При этом предполагается, что число k преподаватель имеет право выбирать по своему усмотрению. Преподаватель может в любой день либо преподавать, либо уехать в командировку. Сколькими способами преподаватель может организовать свой семестр? Получите ответ непосредственными комбинаторными рассуждениями, а также с помощью обыкновенных производящих функций. Дайте комбинаторную интерпретацию полученного результата.

5.22. Выведите из формулы

$$\varphi(z) = \varphi_4(z) \cdot \varphi_6(z) \cdot \varphi_{10}(z) = \frac{1}{(1-z^4)(1-z^6)(1-z^{10})}. \tag{5}$$

рекуррентное соотношение

$$h_n = h_{n-4} + h_{n-6} - h_{n-14} - h_{n-16} + h_{n-20}, \tag{6}$$

на количество $h(n)$ способов наклейки марок на бандероль. Дайте комбинаторную интерпретацию этого соотношения с помощью принципа включения – исключения.

5.23. Опишите алгоритм, позволяющий получить решение рекуррентного соотношение (6) за время $O(\log n)$ при условии, что арифметические действия над длинными числами выполняются за константное время. Указание: сведите задачу к возведению некоторой матрицы A в степень n.

5.24. Сколькими способами можно разменять монету в 10 копеек на монеты в 1, 2, 3 и 5 копеек?

5.25. Докажите, что один рубль можно разменять монетами в две и пять копеек большим количеством способов, чем монетами достоинством в три и пять копеек.

5.26. В кошельке лежат три монеты по 2 копейки и две монеты по 3 копейки. Сколькими способами можно уплатить с помощью этих монет сумму в 8 копеек? А если все монеты в кошельке различимы, например, все они — различных годов выпуска?

5.27. Докажите с помощью формулы

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(n) = p(n), \tag{7}$$

рекуррентное соотношение

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k). \tag{8}$$

для чисел $p_k(n)$.

5.28. С использованием диаграмм Ферре покажите, что количество разбиений числа $2n+m$ на ровно $n+m$ слагаемых одинаково при любом $m \geqslant 0$. Сосчитайте это количество разбиений.

5.29. С использованием диаграмм Ферре покажите, что количество разбиений четного числа n на четные слагаемые равно количеству разбиений, в котором любое из чисел (т.е. частей разбиений) входит четное число раз.

5.30. С использованием диаграмм Ферре покажите, что количество разбиений числа $n-m$ ровно на $(k-1)$ частей, любая из которых меньше или равна m, равно количеству разбиений числа $n-k$ ровно на $(m-1)$ частей, любая из которых меньше или равна k.

5.31. Докажите, что $p(1) + p(2) + \cdots + p(n) < p(2n)$ при $n \geqslant 1$.

5.32. Докажите, что $p^2(n) < p(n^2+2n)$ при $n \geqslant 1$.