

## Принцип Дирихле и математическая индукция.

1. Имеется девять положительных целых чисел, ни одно из которых не имеет простого делителя, большего, чем 5. Докажите, что среди этих чисел найдутся по крайней мере два числа, произведение которых представляет собой квадрат некоторого целого числа.
2. Имеется 8 различных положительных целых чисел, меньших или равных 15. Докажите, что среди положительных попарных разностей этих чисел найдутся по крайней мере три одинаковых. Является ли верным похожее утверждение о том, что среди всех положительных попарных разностей четырех положительных целых чисел, меньших или равных 7, найдутся по крайней мере две одинаковых?
3. Внутри равностороннего треугольника со стороной в один сантиметр расположено пять точек. Докажите, что расстояние между хотя бы двумя из них не больше 0.5 сантиметров.
4. Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет. **Hint:** рассмотрите 3 вертикальные прямые.
5. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2020 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.
6. Предположим число  $x + \frac{1}{x}$  целое. Докажите, что тогда целыми также являются числа вида  $x^n + \frac{1}{x^n}$  для любого натурального  $n$ .
7. На плоскости проведено несколько прямых. Они делят плоскость на области. Докажите, что области можно так раскрасить в два цвета, чтобы соседние области были покрашены в разные цвета.
8. Докажите, что

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots(n-1)\sqrt{n}}}} < 3$$

**Hint:** Эта задача скорее даже не на индукцию (хотя некоторые нотки ее есть) и тем более не на принцип Дирихле.

## 1. Дополнительные задачи

Дополнительные задачи решать не обязательно, но за них можно получить дополнительные баллы.

1. Футбольная команда за сезон отыграла 30 матчей и забила соперникам в совокупности 53 гола. Известно, что в каждой игре команда забивала хотя бы один гол. Докажите, что существует непрерывная последовательность игр, в течение которой команда забила ровно шесть голов. Останется ли утверждение верным в случае, если команда забьет не 53, а 60 голов?

**Дополнительный балл ставится только в случае элегантного решения с помощью принципа Дирихле**

2. Лабиринтом называется клетчатый квадрат  $10 \times 10$ , некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?