

# Числа Чёрча

$$\text{iszro} \equiv \lambda n. n (\lambda x. \text{fls}) \text{tru}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства `iszro` выполняются.

$$\begin{aligned} \text{iszro } 0 &= (\lambda n. n (\lambda x. \text{fls}) \text{tru}) (\lambda sz. z) \\ &\stackrel{\beta}{=} (\lambda sz. z) (\lambda x. \text{fls}) \text{tru} \\ &\stackrel{\beta}{=} (\lambda z. z) \text{tru} \\ &\stackrel{\beta}{=} \text{tru} \\ \text{iszro } m &= (\lambda n. n (\lambda x. \text{fls}) \text{tru}) (\lambda sz. s^m z) \\ &\stackrel{\beta}{=} (\lambda sz. s^m z) (\lambda x. \text{fls}) \text{tru} \\ &\stackrel{\beta}{=} (\lambda z. (\lambda x. \text{fls})^m z) \text{tru} \\ &\stackrel{\beta}{=} (\lambda x. \text{fls})^m \text{tru} \\ &\stackrel{m>0}{=} (\lambda x. \text{fls}) ((\lambda x. \text{fls})^{m-1} \text{tru}) \\ &\stackrel{\beta}{=} \text{fls} \end{aligned}$$

Далее для краткости я буду объединять несколько бета-редукций типа  $(\lambda xy. F)AB \rightarrow [x \rightarrow A, y \rightarrow B]F$  в одну.

► Попробуйте найти более «короткую» версию `iszro`.

$$\text{iszro}' \equiv \lambda n t f. n (\lambda x. f) t$$

Доказательство: упражнение.

Замечание: это почти то же самое, что и `iszro`.

$$\text{succ} \equiv \lambda \text{nsz. s}(\text{nsz})$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства `succ` выполняются.

$$\begin{aligned} \text{succ } n &= (\lambda \text{nsz. s}(\text{nsz})) (\lambda \text{sz. s}^n \text{z}) \\ &\stackrel{\alpha, \beta}{=} \lambda \text{sz. s}((\lambda \text{s}' \text{z}' . \text{s}'^n \text{z}') \text{sz}) \\ &\stackrel{\beta}{=} \lambda \text{sz. s}(\text{s}^n \text{z}) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

То есть эта штука навешивает ещё одну `s` сверху.

► Попробуйте найти другое определение `succ`.

$$\text{succ}' \equiv \lambda \text{nsz. ns}(\text{sz})$$

$$\begin{aligned} \text{succ}' n &= (\lambda \text{nsz. ns}(\text{sz})) (\lambda \text{sz. s}^n \text{z}) \\ &\stackrel{\alpha, \beta}{=} \lambda \text{sz. } (\lambda \text{s}' \text{z}' . \text{s}'^n \text{z}') \text{s}(\text{sz}) \\ &\stackrel{\beta}{=} \lambda \text{sz. s}^n(\text{sz}) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

А эта штука проталкивает ещё одну `s` внутрь.

`plus`, `mult1` и `mult2` остаются в качестве упражнения.