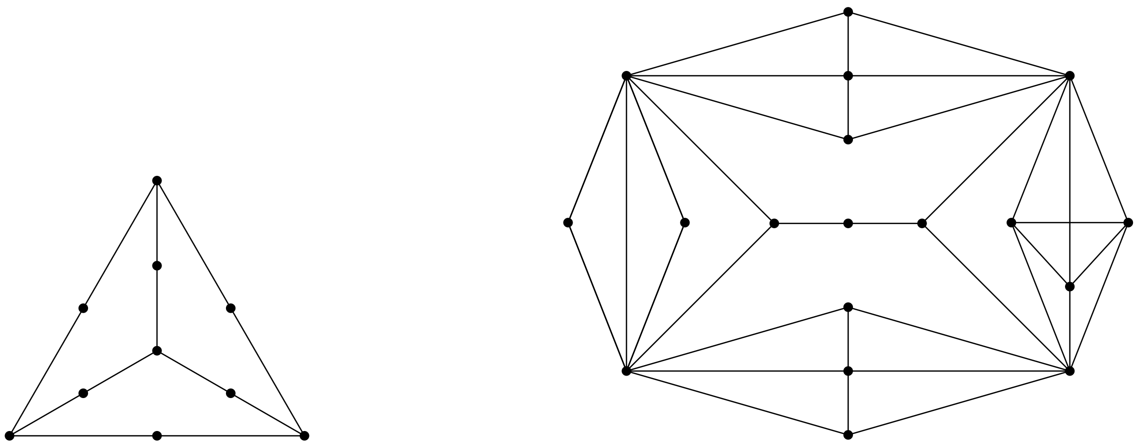
8 Максимальные паросочетания, раскраски



(a) Граф G_1 (b) Граф G_2

Рис. 1

8.1. Найти максимальные паросочетания в графах G_1 и G_2, изображенных на рис.1, и доказать с помощью формулы Татта-Бержа, что найденные паросочетания действительно являются максимальными.

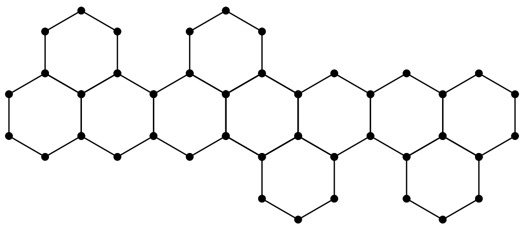


Рис. 2: Граф G

8.2. Найти максимальное паросочетание в графе G, изображенном на рис.2, и доказать с помощью формулы Татта-Бержа, что найденное паросочетание действительно является максимальными.

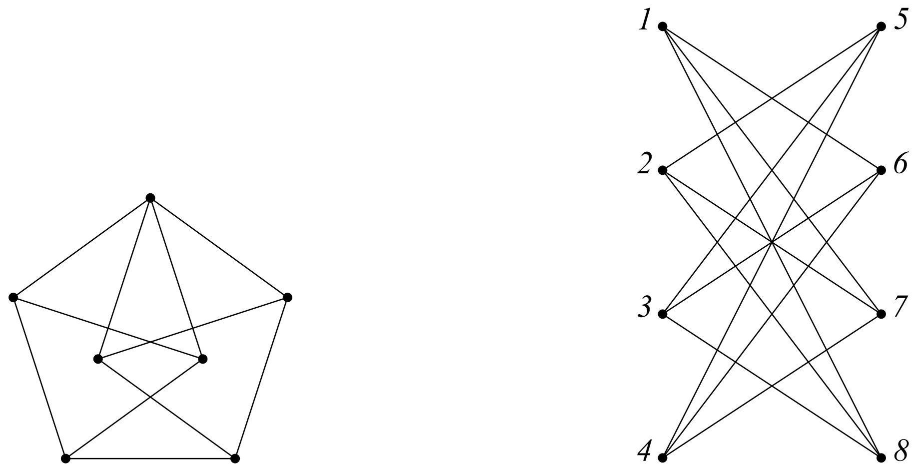
8.3. Чему равно минимальное количество вершин в кубическом графе, не имеющем совершенного паросочетания?

8.4. Описать фактор-критический граф в терминах декомпозиции Галлаи – Эдмондса.

8.5. Доказать, что никакой двудольный граф $G[X, Y]$ фактор-критическим быть не может.

8.6. Сосчитайте хроматическое число $\chi(G)$, кликовое число $\omega(G)$ и число независимости $\alpha(G)$ для графа, изображенного на рис. 3(a).

8.7. Предъявите способ начального упорядочивания вершин графа G, представленного на рис. 3(b), для которого жадный алгоритм окрасит вершины в два цвета, а также способ начального упорядочивания вершин, при котором такой алгоритм окрасит вершины графа G в четыре цвета. Обобщите полученные результаты на случай двудольного графа $K^*_{n,n}$, полученного из полного двудольного графа $K_{n,n}$ с блоками $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ удалением ребер $\{x_i, y_i\}$.



(a) (b)

Рис. 3

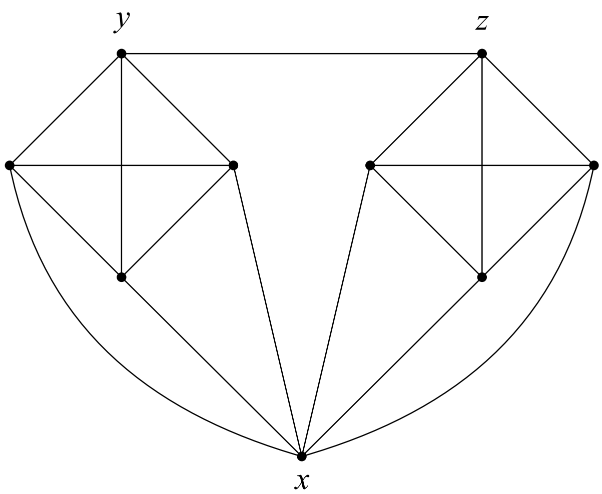


Рис. 4

8.8. Определите хроматическое число графа G, показанного на рис. 4.

8.9. Докажите, что хроматическое число $\chi(G)$ любого связного графа G равно максимальному из хроматических чисел его блоков.

8.10. Докажите, что для любого графа G, построенного на n вершинах, справедливо неравенство

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geqslant n, \qquad n = |V(G)|, \tag{1}$$

где $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном вершинно независимом множестве графа G. Верно ли, что для любого k-хроматического графа можно найти такую правильную окраску его вершин в k цветов, чтобы хотя бы одно из подмножеств одноцветных вершин имело мощность, равную $\alpha(G)$?

8.11. Докажите, что в графе G с $|E(G)| = m$ ребрами хроматическое число удовлетворяет неравенству

$$\chi(G) \cdot (\chi(G) - 1) \leqslant 2m.$$

8.12. Пусть $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — степенная последовательность простого связного графа G. Докажите, что

$$\chi(G) \leqslant 1 + \max_i \min\{d_i, i-1\}.$$

8.13. Докажите, что если $\chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ для любой пары вершин графа G, то G представляет собой полный граф, построенный на $n = \chi(G)$ вершинах.

8.14. Докажите, что для любой правильной окраски графа G с $\chi(G) = k$ в k цветов для любого цвета i найдется вершина x, окрашенная в этот цвет, которая смежна с вершинами, окрашенными во все оставшиеся $k-1$ цветов.

8.15. Рассмотрим множество прямых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Образуем граф G, вершинами которого будут являться точки пересечения этих прямых, а ребрами — отрезки, соединяющие две соседние точки пересечения на одной прямой. Доказать, что $\chi(G) \leqslant 3$.

8.16. Пусть l есть длина максимального пути в графе G. Доказать, что $\chi(G) \leqslant l$.

8.17. Опишите все k-критические графы для значений параметра $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$.

8.18. Пусть G — k-критический граф. Докажите следующие утверждения.

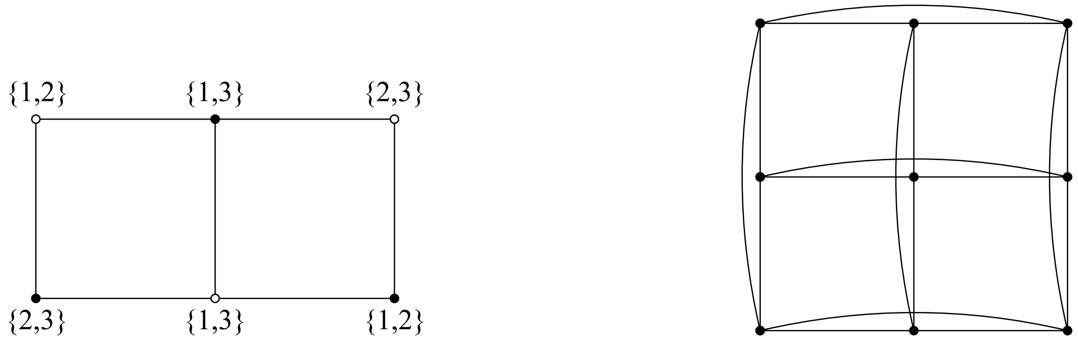
1. Для произвольной вершины $x \in V(G)$ существует правильная раскраска графа G в k цветов, в которой вершина x окрашена в цвет, не встречающийся при окраске других вершин, а все остальные цвета встречаются при окраске подмножества $N(x)$ ее соседей.
2. Для произвольного ребра $e \in E(G)$ в любой правильной окраске графа $G - e$ в $k-1$ цвет концевые вершины e оказываются окрашенными в один и тот же цвет.

8.19. Докажите, что в случае k-критического графа $\delta(G) \geqslant k - 1$.

8.20. Докажите неравенство:

$$\chi(G) \leqslant \Delta + 1.$$

8.21. Докажите, что любой граф G, для которого $\chi(G) = k$, имеет по крайней мере k вершин, степень которых больше или равна $k-1$.



(a) (b)

Рис. 5

8.22. Докажите, что показанный на рис. 5 граф G является списочно 3-раскрашиваемым, но не является списочно 2-раскрашиваемым.