Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам. Подсчет количества отображений конечных множеств. Числа Стирлинга второго рода.

1.1. Рассмотрим все пятизначные положительные числа, в которых на третьей позиции стоит девятка. Сколько таких чисел делится на три? А если в пятизначных числах присутствует хотя бы одна девятка, и позиции, на которых она присутствует, нам не важны?

1.2. Ребенок раскладывает в ряд карточки с пятью буквами А, двумя буквами Е, двумя буквами М, двумя буквами П, двумя буквами Т, двумя буквами Р, одной буквой Г и одной буквой Л. Сколько у него имеется вариантов получить слово ТЕЛЕГРАММААППАРАТ?

1.3. Подсчитайте количество разбиений числа k при ограничениях

$$a_i \geqslant s_i, \quad i = 1, \dots, n; \qquad\qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n =: s \leqslant k.$$

1.4. Подсчитайте количество упорядоченных размещений k различимых предметов по n различимым ящикам, то есть таких размещений, в которых важен порядок размещения предметов в каждом конкретном ящике.

1.5. Трое мужчин и две женщины выбирают себе место работы. В городе имеются три фирмы, в которых требуются только мужчины, две — в которых требуются только женщины, и две — в которых берут и мужчин, и женщин. Сколькими способами они могут выбрать себе место работы?

1.6. Число 72350 написали 7 раз подряд, получив при этом 35-значное число. Из этого числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

1.7. Сколько существует булевых функций n аргументов?

1.8. Говорят, что булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ зависит от своего аргумента x_i, если можно подобрать такие значения $\{b_j\}$ для других аргументов, что

$$f(b_1, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., b_n) \neq f(b_1, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., b_n).$$

Сколько булевых функций зависят от всех своих n аргументов?

1.9. Дайте комбинаторное доказательство тождества

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n.$$

1.10. Докажите комбинаторно справедливость формулы

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i).$$

для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

1.11. Докажите формулы обращения

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geqslant 0.$$

1.12. Сколькими способами можно расставить 20 различных книг по пяти различимым полкам при условии, что каждая полка может вместить все эти двадцать книг?

1.13. Докажите комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n,3)$:

$$S(n,3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

1.14. Докажите, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.

1.15. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Докажите, что

$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$

1.16. Дайте комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга:

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i, k-1)\, k^{i-1}, \qquad n \geqslant k.$$

1.17. Найдите рекуррентную формулу для вычисления чисел $F(n)$, введенных в упражнении 15.

1.18. Докажите, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.

1.19. Пусть $B_k(n)$ есть количество разбиений, таких, что если числа i и j входят в один и тот же блок, то $|i-j| > k$. Докажите, что $B_k(n) = B(n-k)$ для всех $n \geqslant k$.