

Комбинаторика. Биномиальные коэффициенты.

1. Сколько чисел в диапазоне от 0 до 999 999 не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?
2. Сколько натуральных делителей, не являющихся точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел), имеет число 10^{99} ?
3. Сколько различных делителей имеется у числа 720?
4. Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?
5. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?
6. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

7. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k) = \binom{n}{2} \quad \forall k \leq n.$$

8. Просуммируйте выражения

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^k} \binom{n}{k}.$$

9. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} \binom{n}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

10. Докажите комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}. \quad (1)$$

11. Квадрат разделён на 16 одинаковых квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты в белый, чёрный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?