Домашнее задание 8. Рекуррентные соотношения..

Задач на зачёт: 6,5 (пункты считаются отдельными задачами)

1. Решите следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка:

$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$
$$a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

2. Постройте общее решение рекуррентного соотношения

$$a_{n+5} = -5a_{n+4} + 81a_{n+1} + 405a_n.$$

3. Постройте общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 6\,a_n + 6 \cdot 3^n.$$

4. Маленькая Сонечка положила тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года она докладывает пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через n лет?

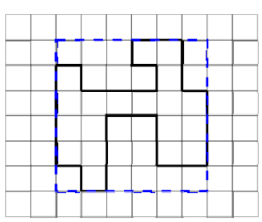
5. Докажите, что числа Фибоначчи удовлетворяют следующему соотношению:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

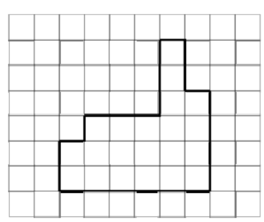
6. Рассмотрим плоскость (x, y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.

7. На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

8. Полимино называется область на клетчатой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, идущей по сторонам клеток (см.рис. 1a). Мы будем рассматривать так называемые выпуклые полимино, то есть полимино, периметр которого совпадает с периметром его минимального ограничивающего прямоугольника, то есть прямоугольника минимального периметра, содержащего полимино внутри себя (см. синюю пунктирную линию на рис. 1a). Так, полимино, показанный на рис.1a, выпуклым не является. На рис.1b показан выпуклый полимино.



(a)



(b)

Рис. 1: Полимино

Полимино называется ориентированным выпуклым полимино, если он содержит по меньшей мере один из углов своего минимального ограничивающего прямоугольника. Если он содержит оба нижних угла своего минимального ограничивающего прямоугольтика, то полимино называется стековым (см.рис.1b). Доказать, что количество стековых полимино с периметром $2n + 2$ равно числу Фибоначчи F_{2n-2}. (В данной задаче считать $F_0 = F_1 = 1$.)