2 Упражнения на маршруты, пути, циклы

2.1 (0,5 балла). Докажите или опровергните следующее утверждение: если любая вершина графа имеет степень 2, то граф G является циклом.

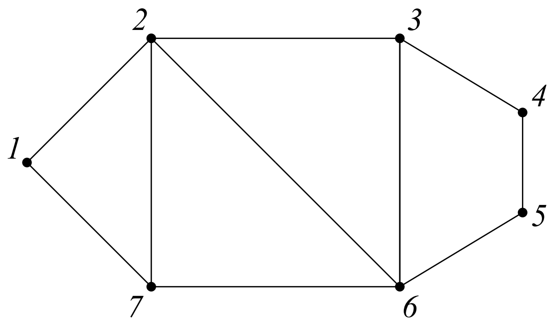


Рис. 1

2.2 (0,5 балла). В графе G, показанном на рис. 1, найдите цикл длины 7, замкнутый путь той же длины, не являющийся циклом, а также замкнутый маршрут длины 7, не являющийся замкнутым путем.

2.3 (1 балл). Пусть в графе G ровно две вершины имеют нечетную степень. Докажите, что эти вершины являются связанными.

2.4 (1 балл). Пусть G есть граф, построенный на вершинах $1, \ldots, 15$, в котором вершины i и j смежны тогда и только тогда, когда их наибольший общий делитель больше единицы. Подсчитать количество связных компонент такого графа, а также определить максимальную длину простого пути (path) в графе G.

2.5 (1 балл). Пусть G — регулярный простой связный граф, имеющий 22 ребра. Сколько вершин может содержать данный граф?

2.6 (1 балл). Докажите, что любой маршрут, соединяющий вершины x и y, содержит простой путь, соединяющий те же самые вершины.

2.7 (1 балл). Докажите или опровергните следующее утверждение: замкнутый маршрут *нечётной* длины обязательно содержит цикл. А что будет в случае замкнутого маршрута *четной* длины?

2.8 (1,5 балла). Докажите или опровергните следующее утверждение: объединение двух *различных* маршрутов, соединяющих две вершины, содержит цикл.

2.9 (1 балл). Докажите или опровергните следующее утверждение: объединение двух *различных* простых путей, соединяющих две вершины, содержит цикл.

2.10 (1,5 балла). Докажите, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.

2.11 (1 балл). Докажите, что простой граф G, минимальная степень $\delta(G)$ которого больше или равна $n/2$, является связным. Покажите, что эта оценка точная, предъявив несвязный граф, для которого $\delta(G) = n/2 - 1$.

2.12 (1 балл)**.** Докажите, что в любом графе G расстояние $d(x, y)$ между вершинами удовлетворяет неравенству треугольника

$$d(x, z) + d(z, y) \geqslant d(x, y) \qquad \forall\, x, y, z \in V(G).$$

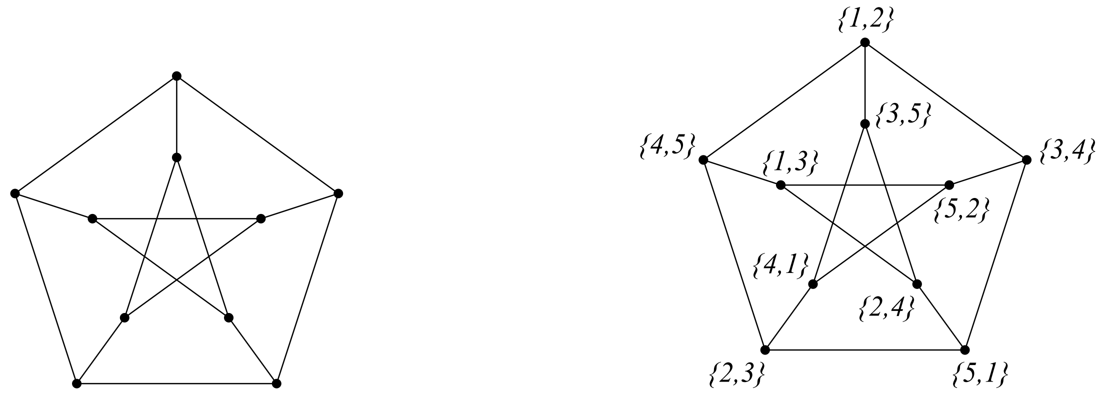
2.13 (1 балл)**.** Докажите, что радиус и диаметр графа связаны следующим образом:

$$r(G) \leqslant \operatorname{diam}(G) \leqslant 2r(G).$$

Приведите примеры графов, на которых оба неравенства достигаются.

2.14 (1,5 балла)**.** Пусть G есть произвольный простой несвязный граф. Докажите, что его дополнение $\overline{G}$ всегда является связным графом. Чему равен диаметр графа $\overline{G}$?

2.15 (1,5 балла)**.** Докажите, что в простом графе с обхватом, большим или равным $2k$, диаметр больше или равен k.



(a) Граф G_1 (b) Граф G_2

Рис. 2

2.16 (2 балла)**.** В первом параграфе мы в качестве примера 3-регулярного графа привели граф Петерсена (см.рис. 2(a)). Формальное определение этого графа таково: граф Петерсена — это простой граф, 10 вершин которого занумерованы всеми возможными двухэлементными подмножествами десятиэлементного множества, а ребра соединяют только те вершины, соответствующие двухэлементные подмножества которых не пересекаются (см.рис. 2(b)). Исследуйте структуру графа Петерсена исходя из этого определения, доказав про этот граф следующие факты.

1) Граф Петерсена действительно является 3-регулярным графом.
2) Любые две несмежные вершины в графе Петерсена имеют в точности одну соседнюю с ними вершину.
3) Обхват графа Петерсена равен 5.

2.17 (0,5 балла)**.** Турнир T называется транзитивным, если из условий $(x, y) \in E(T)$ и $(y, z) \in E(T)$ следует, что $(x, z) \in E(T)$. Докажите, что турнир T является транзитивным тогда и только тогда, когда он ациклический.

2.18 (0,5 балла)**.** Докажите, что любой турнир, не являющийся транзитивным, содержит ориентированный цикл длины 3.

2.19 (0,5 балла)**.** Докажите, что любой орграф $C(T)$ компонент сильной связности произвольного турнира T является транзитивным турниром.