Комбинаторика. Биномиальные коэффициенты.

1. Сколько чисел в диапазоне от 0 до 999 999 не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?

   Решение:

   Разобъем все множество X этих чисел на блоки X_i, $i = 1, \dots, 6$ в зависимости от количества цифр в данном числе. Ясно, что $|X_1| = 10$. В остальных блоках на любую позицию мы можем поставить любую из девяти цифр: на первую позицию — любую цифру от 1 до 9, а на каждую последующую — любую из цифр, не совпадающую с предыдущей. Поэтому, согласно правилу суммы и правилу произведения,

$$|X| = 10 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^6 = \sum_{i=0}^{6} 9^i = \frac{9^7 - 1}{9 - 1} = 597\,871.$$

2. Сколько натуральных делителей, не являющихся точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел), имеет число 10^{99}?

   Решение:

   Так как $10^{99} = 2^{99} \cdot 5^{99}$, то любое число вида $2^a \cdot 5^b$ является делителем заданного числа. Всего таких чисел имеется $100 \cdot 100 = 10^4$. При этом точными квадратами будут любые числа, у которых либо a, либо b являются четными числами. Таковых имеется $50 \cdot 50 = 2500$ вариантов. Тогда искомое количество вариантов равно $10^4 - 2500 = 7500$.

3. Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?

   Решение:

   Для решения данной задачи воспользуемся принципом включения-исключения (**??**). Пусть X_2, X_3 и X_5 — множества чисел из заданного диапазона, делящихся на двойку, тройку и пятерку. Ясно, что

$$|X_i| = \lfloor |X|/i \rfloor \,,$$

   где $|X| = 100$, $\lfloor p \rfloor$ — целая часть числа p. Поэтому $|X_2| = 50$, $|X_3| = 33$, а $|X_5| = 20$. Далее, $X_2 \cup X_3$ — это множество чисел, делящихся на шестерку. Следовательно,

$$|X_2 \cup X_3| = \lfloor |X|/6 \rfloor = 16.$$

Аналогично,

$$|X_2 \cup X_5| = \lfloor |X|/10 \rfloor = 10, \qquad |X_3 \cup X_5| = \lfloor |X|/15 \rfloor = 6, \qquad |X_2 \cup X_3 \cup X_5| = \lfloor |X|/15 \rfloor = 3$$

и поэтому

$$|X_2' \cap X_3' \cap X_5'| = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$$

4. Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?

   Решение:

   Вычислить количество способов переплёта, в которых данные цвета присутствуют, не очень просто. Однако достаточно легко получить выражения для количества способов переплёта, в которых данный набор цветов, напротив, отсутствует. Например, если мы знаем, что красный цвет нельзя использовать, то способов переплести книги остаётся, по правилу произведения, 2^{12}. Иными словами, в данной задаче удобно воспользоваться принципом включения-исключения.

   Пусть X — все способы переплести книги, A, B, C — те способы, при которых не используется красный, синий, коричневый цвет, соответственно. Искомое количество способов переплёта равно $|A' \cap B' \cap C'|$. По формуле включения-исключения, это количество равно

   $$|X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 \cdot 1^{12} - 0 = 519156.$$

5. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?

   Решение:

   Первое поле можно выбрать 64 способами, а второе — 49. По правилу произведения, общее количество способов равно $64 \cdot 49$, однако для получения окончательного ответа это число нужно разделить на два, так как каждая пара полей была посчитана два раза. Поэтому окончательно количество способов равно $32 \cdot 49 = 1568$

6. Дайте комбинаторное доказательство равенства

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Решение:

Суммируя биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ мы получаем количество всех подмножеств n-элементного множества. Каждому подмножеству n-элементного множества можно сопоставить слово из нулей и единиц длины n, коих 2^n

7. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k) = \binom{n}{2} \qquad \forall\ k \leq n.$$

Решение:

В правой части равенства стоит число, равное количеству двуэлементных подмножеств n-элементного множества. Левая часть равенства подсчитывает то же самое количество другим способом. Именно, мы разбиваем n-элементное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ на два блока $X_1 := \{x_1, \ldots, x_k\}$ и $X_2 := \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Затем мы либо выбираем двуэлементное подмножество в X_1, либо в X_2, либо выбираем k способами элемент первого подмножества и $n-k$ — второго.