Задание 8

10 марта 2020 г.

1. Доказать, что колмогоровская сложность слова, составленного из n знаков после запятой числа $\sqrt{2}$, равна $KS(n) + O(1)$.

2. Покажите, что изменение одного бита в слове длины n меняет его сложноть не более чем на $\log n + O(\log\log n)$.

3. Докажите, что не найдется такого c, что

$$KS(x, y) \leq KS(x) + \log KS(x) + KS(y) + c$$

при всех x, y

4. Докажите "неравенство треугольника":

$$KS(x|z) \leq KS(x|y) + 2\log KS(x|y) + KS(y|z) + O(1),$$

для любых трех слов x, y, z.

5. Докажите, что функция K *перечислима сверху*, т.е. множество пар $\{(x, k) \mid K(x) \leq k\}$ является перечислимым. Более того $|\{x \mid K(x) < n\}| \leq 2^n$

6. Если функция K' перечислима сверху и $|\{x \mid K'(x) < n\}| \leq 2^n$ при всех n, то найдется такое c, что $K(x) < K'(x) + c$ для всех x.

7. Докажите, что

$$K(z) \leq K(z \mid x) + K(z \mid y) + I(x : y) + O(\log n),$$

где $n = |x| + |y| + |z|$.

8. Докажите, что $KS(x) = KS(x|KS(x)) + O(1)$.

9. Докажите неравенство $KS(x, y|x, z) \leq KS(y|z) + O(1)$. При этом неравенство $KS(x, y|x, z) \geq KS(y|z) - O(1)$ не является верным для всех x, y, z.