Типы в языках программирования
Лекция 7. Полиморфные типы: система $\lambda 2$ (System F)

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

31.03.2021

План лекции

План лекции

Недостатки $\lambda_{\to}$

- В $\lambda_{\to}$ по Чёрчу «повторное использование» затруднено:

$$\begin{array}{l} \lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha \\ \lambda x^{\beta}.\, x : \beta \to \beta \\ \lambda x^{\gamma \to \delta}.\, x : (\gamma \to \delta) \to \gamma \to \delta \end{array}$$

  — три разные функции.

- Даже в версии Карри, типизируя терм

$$(\lambda y.\, y)(\lambda x.\, x)$$

  имеем $x{:}\sigma$, $y{:}\sigma \to \sigma$, $\lambda x.\, x : \sigma \to \sigma$, $\lambda y.\, y : (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma$.

- Делая одну экспансию, получим нетипизируемое

$$(\lambda f.\, f\, f)(\lambda x.\, x)$$

- Идея: переместить операцию подстановки типа из метатеории в теорию. Для этого
  1. вводят специальную Π-абстракцию (не λ) по типу:
  $$\lambda x.\, x : \forall\alpha.\, \alpha \to \alpha$$
  2. разрешают подстановку любого типа вместо типовой переменной связанной квантором всеобщности:
  $$\begin{array}{lcl} [\alpha := \gamma](\alpha \to \alpha) & \Rightarrow & \lambda x.\, x : \gamma \to \gamma \\ [\alpha := \gamma \to \gamma](\alpha \to \alpha) & \Rightarrow & \lambda x.\, x : (\gamma \to \gamma) \to \gamma \to \gamma \\ [\alpha := \gamma \to \delta \to \gamma](\alpha \to \alpha) & \Rightarrow & \lambda x.\, x : (\gamma \to \delta \to \gamma) \to \gamma \to \delta \to \gamma \end{array}$$
- Получим $\lambda 2$ — ***лямбда-исчисление второго порядка***.
  System F (Жан-Ив Жирар, 1972)
  Полиморфное λ-исчисление (Джон Рейнольдс, 1974)

План лекции

1. Прагматика полиморфизма
2. Система $\lambda 2$ в стиле Карри
3. Система $\lambda 2$ в стиле Чёрча
4. Свойства систем $\lambda 2$
5. Практика

- $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество типовых переменных.
- ***Сильный полиморфизм*** (System F), полиморфизм первого класса (first-class polymorphism)

$$\mathbb{T} \ ::= \ \mathbb{V} \mid \mathbb{T} \to \mathbb{T} \mid \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}$$

- ***Слабый полиморфизм*** (в стиле ML)

$$\mathbb{T}_{\to} \ ::= \ \mathbb{V} \mid \mathbb{T}_{\to} \to \mathbb{T}_{\to}$$

$$\mathbb{T}_{w} \ ::= \ \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}_{w} \mid \mathbb{T}_{\to}$$

Квантор $\forall$ можно ставить только на верхнем уровне:

$$\forall \alpha_1.\, \forall \alpha_2.\, \cdots \forall \alpha_n.\, \sigma \ \equiv \ \forall \alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n.\, \sigma$$

где σ тип из $\lambda_{\to}$ (***монотип***). Но нельзя так $\forall \alpha.\, \alpha \to (\forall \beta.\, \alpha \to \beta) \to \alpha$.

Контексты для λ2

- Типовые переменные теперь тоже делятся на связанные (квантором $\forall$) и свободные.
- Свободные должны быть описаны в контексте.
- Нотация ***объявления*** типовой переменной: $\alpha : *$ (или α^*), что эквивалентно $\alpha \in \mathbb{V}$.
- ***Контекст*** теперь — *упорядоченное* множество объявлений

$$\Gamma = \langle \alpha^*, x^{\alpha \to \alpha} \rangle \quad (\text{но не наоборот!})$$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha^*, \beta^*, f^{\alpha\to\beta} & \vdash & f : \alpha \to \beta \\
\alpha^*, \beta^*, f^{\alpha\to\beta}, x^\alpha & \vdash & f\,x : \beta \\
\alpha^*, \beta^*, x^\alpha & \vdash & \lambda f.\, f\,x : (\alpha \to \beta) \to \beta \\
\alpha^*, x^\alpha & \vdash & \lambda f.\, f\,x : \forall \beta.\, (\alpha \to \beta) \to \beta
\end{array}$$

Для последнего утверждения требуется правило.

Правило введения $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Карри (к синтаксису с П-нотацией мы перейдем в более богатых системах)

$$\boxed{\frac{\Gamma, \alpha^* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha .\, \sigma}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\Gamma, \alpha^* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \Pi \alpha^* .\, \sigma}}$$

Переменная α на последнем месте в контексте; её нет в Γ.

$$\alpha^*, \beta^*, x^\alpha \;\vdash\; \lambda f.\, f\, x : (\alpha \to \beta) \to \beta$$

$$\alpha^*, x^\alpha, \beta^* \;\vdash\; \lambda f.\, f\, x : (\alpha \to \beta) \to \beta$$

По β абстрагировать можно. По α — нельзя!

$$\alpha^*, x^\alpha \;\vdash\; \lambda f.\, f\, x : \forall \beta .\, (\alpha \to \beta) \to \beta$$

Выводимость типа из контекста

Расширим понятие выводимости из контекста на типы.

Тип ***выводи́м из контекста***, нотация

$$\Gamma \Vdash \sigma : *$$

если все свободные переменные σ принадлежат Γ.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha^*, \beta^* & \Vdash & (\alpha \to \beta) \to \beta : * \\
\alpha^* & \Vdash & \forall \beta.\, (\alpha \to \beta) \to \beta : * \\
 & \Vdash & \forall \alpha\, \beta.\, (\alpha \to \beta) \to \beta : * \\
 & & \\
\beta^* & \Vdash & (\forall \alpha.\, \alpha \to \beta) \to \beta : *
\end{array}$$

Последнее верно только для $\lambda 2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$.

Правило удаления ∀ для λ2 в стиле Карри

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\,\sigma \qquad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : [\alpha := \tau]\sigma}$$

$\tau \in \mathbb{T}$ для $\lambda2(\mathbb{T})$ и $\tau \in \mathbb{T}_{\to}$ для $\lambda2(\mathbb{T}_w)$. то есть в $\lambda2(\mathbb{T}_w)$ в подстановке может участвовать лишь монотип.

$$\begin{array}{lcl} \beta^*, \gamma^* & \vdash & \lambda x\,y.\,x : \forall\alpha.\,\alpha \to \beta \to \alpha \\ \beta^*, \gamma^* & \vdash & \lambda x\,y.\,x : (\beta \to \gamma) \to \beta \to \beta \to \gamma \\ \\ \beta^*, \gamma^* & \vdash & \lambda x\,y.\,x : (\forall\delta.\,\delta \to \gamma) \to \beta \to (\forall\delta.\,\delta \to \gamma) \end{array}$$

Последнее верно только для $\lambda2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda2(\mathbb{T}_w)$.

Формальности λ2: образование типов

(начальное)	$$\frac{\alpha^* \in \Gamma}{\Gamma \Vdash \alpha : *}$$
(образование $\to$)	$$\frac{\Gamma \Vdash \sigma : * \quad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \Vdash \sigma \to \tau : *}$$
(образование $\forall$)	$$\frac{\Gamma, \alpha^* \Vdash \sigma : *}{\Gamma \Vdash \forall \alpha.\, \sigma : *}$$

- Эти правила описывают типы $\lambda 2(\mathbb{T})$.
- Для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ напишите их самостоятельно (совет: введите $*_w$ и $*_\to$).

Контекст называют ***допустимым*** (valid), обозначение $\Gamma \vdash$, если он построен по следующим правилам:

(начальное)	$\langle\,\rangle \vdash$	
(расширение типом)	$\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \alpha^* \vdash}$	$\alpha \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$
(расширение термом)	$\dfrac{\Gamma \Vdash \sigma : *}{\Gamma, x^\sigma \vdash}$	$x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$

При реализации мы снимем требование свежести имен переменных!

(начальное)	$\dfrac{x : \sigma \in \Gamma \quad \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x : \sigma}$	
(удаление →)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$	
(введение →)	$\dfrac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M^{\tau} \quad \Gamma \Vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \sigma \to \tau}$	$\sigma \in \mathbb{T}_{\to}$ для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ $\sigma \in \mathbb{T}$ для $\lambda 2(\mathbb{T})$
(удаление ∀)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \quad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : [\alpha := \tau]\sigma}$	$\tau \in \mathbb{T}_{\to}$ для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ $\tau \in \mathbb{T}$ для $\lambda 2(\mathbb{T})$
(введение ∀)	$\dfrac{\Gamma, \alpha^{*} \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma}$	

Для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ подстановка типа и абстракция монотипны.

Типизируем самоприменение f f

Пусть $\Gamma \equiv f^{\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha}, \beta^*$ (он допустим — д.з.), тогда

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha \qquad \Gamma \Vdash \beta\to\beta : *}{\Gamma \vdash f : (\beta\to\beta)\to\beta\to\beta}\,(\forall E) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha \qquad \Gamma \Vdash \beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta\to\beta}\,(\forall E)}{\dfrac{f^{\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha}, \beta^* \vdash f\,f : \beta\to\beta}{\dfrac{f^{\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha} \vdash f\,f : \forall\beta.\,\beta\to\beta}{\vdash \lambda f.\,f\,f : (\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha)\to(\forall\beta.\,\beta\to\beta)}\,(\to I)}\,(\forall I)}\,(\to E)$$

- Последнее верно только для $\lambda 2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$.
- Распространено обозначение $\top \equiv \forall\alpha.\,\alpha\to\alpha$, тогда
  - в $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ имеем $f{:}\top \vdash f\,f : \top$;
  - в $\lambda 2(\mathbb{T})$ имеем $\vdash \lambda f.\,f\,f : \top\to\top$.

Типизируем самоприменение f f по-другому

Пусть $\Gamma \equiv f^{\forall\alpha.\,\alpha}, \beta^*$ (он допустим — д.з.), тогда

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\,\alpha \qquad \Gamma \Vdash \beta \to \beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta \to \beta}\,(\forall E) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\,\alpha \qquad \Gamma \Vdash \beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta}\,(\forall E)}{\dfrac{f^{\forall\alpha.\,\alpha}, \beta^* \vdash f\,f : \beta}{\dfrac{f^{\forall\alpha.\,\alpha} \vdash f\,f : \forall\beta.\,\beta}{\vdash \lambda f.\, f\,f : (\forall\alpha.\,\alpha) \to (\forall\beta.\,\beta)}\,(\to I)}\,(\forall I)}\,(\to E)$$

- Последнее опять только для $\lambda 2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$.
- Распространено обозначение $\bot \equiv \forall\alpha.\,\alpha$, тогда
  - в $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ имеем $f{:}\bot \vdash f\,f : \bot$;
  - в $\lambda 2(\mathbb{T})$ имеем $\vdash \lambda f.\, f\,f : \bot \to \bot$.

Проблемы разрешимости для $\lambda 2$ по Карри

- Проблемы разрешимости:
  - Задача проверки типа (ЗПТ) $\vdash M : \sigma ?$;
  - Задача синтеза типа (ЗСТ) $\vdash M : ?$;
  - Задача обитаемости типа (ЗОТ) $\vdash ? : \sigma$.
- Для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$
  - ЗПТ и ЗСТ эквивалентны и разрешимы: алгоритм PT легко расширяется на схемы типов.
  - ЗОТ тоже разрешима.
- Для сильной системы $\lambda 2(\mathbb{T})$
  - ЗПТ и ЗСТ эквивалентны и неразрешимы. (Joe Wells, 1993)
  - ЗОТ тоже неразрешима.
- Практический вопрос: насколько можно расширить слабую систему, чтобы сохранить возможность синтеза типа?

Let-полиморфизм

- Можно расширить $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ правилом:

$$\text{(правило } \mathtt{let}\text{)} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma, x^{\sigma} \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ N : \tau} \quad \begin{array}{c} \tau \in \mathbb{T}_{\to} \\ \sigma \in \mathbb{T}_w \end{array}$$

- Фактически это способ делать полиморфные по σ редексы:

$$(\lambda x.\, N)\, M$$

- Но «голые» полиморфные по σ абстракции $\lambda x.\, N : \sigma \to \tau$ по-прежнему недопустимы!
- Теперь можно типизировать $\mathtt{let}\ f = \lambda x.\, x\ \mathtt{in}\ f\, f$. (д.з.)
- ЗСТ по-прежнему разрешима: алгоритм PT требует лишь небольшой модификации.

Ранжирование типов

Определим множество типов $\mathbb{T}_k$ ранга k индуктивно:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}_0 & ::= & \mathbb{V} \mid \mathbb{T}_0 \to \mathbb{T}_0 \ (\equiv\ \mathbb{T}_{\to}) \\ \mathbb{T}_{k+1} & ::= & \mathbb{T}_k \mid \mathbb{T}_k \to \mathbb{T}_{k+1} \mid \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}_{k+1} \end{array}$$

Типы первого, второго и третьего ранга

$$\forall \alpha.\, \alpha \to \alpha$$

$$\forall \alpha.\, \alpha \to (\forall \beta.\, \alpha \to \beta)$$

$$(\forall \alpha.\, \alpha \to \alpha) \to (\forall \beta.\, \beta)$$

$$((\forall \alpha.\, \alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma$$

Разрешимость для $\lambda 2(\mathbb{T}_k)$ в стиле Карри

- Система $\lambda 2(\mathbb{T}_1)$ это фактически $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$; ЗСТ для неё разрешима.
- Для системы $\lambda 2(\mathbb{T}_2)$ ЗСТ разрешима, алгоритм описан в 1999 году (Kfoury and Wells, 1999).
- Для систем более высокого ранга ЗСТ неразрешима.
- Однако при наличии некоторых «подсказок» (указаний типов в определенных видах термов) синтез типа оказывается возможным.
- В Хаскелле (GHC) для работы с системами произвольного ранга используем ключи `-XRankNTypes` и `-XExplicitForAll`.

План лекции

1. Прагматика полиморфизма
2. Система $\lambda 2$ в стиле Карри
3. Система $\lambda 2$ в стиле Чёрча
4. Свойства систем $\lambda 2$
5. Практика

$\lambda 2$ в стиле Чёрча: абстракция

- В системах Чёрча терм содержит информацию о типах.

$$\begin{array}{rcl} \alpha^*, \beta^*, x^\alpha, y^\beta & \vdash & x : \alpha \\ \alpha^*, \beta^*, x^\alpha & \vdash & \lambda y^{\beta}.\, x : \beta \to \alpha \\ \alpha^*, \beta^* & \vdash & \lambda x^{\alpha}.\, \lambda y^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha \end{array}$$

- Хотим универсально абстрагироваться по β. Как это отразить в терме?

$$\begin{array}{rcl} \alpha^* & \vdash & \lambda\beta^*.\, \lambda x^\alpha.\, \lambda y^\beta.\, x : \forall\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\ & \vdash & \lambda\alpha^*.\, \lambda\beta^*.\, \lambda x^\alpha.\, \lambda y^\beta.\, x : \forall\alpha.\, \forall\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \end{array}$$

  В отличие от системы $\lambda\underline{\omega}$, здесь мы абстрагируем по типу именно терм, наделяя его полиморфным поведением.

- Часто вместо $\lambda\alpha^*$ пишут $\Lambda\alpha^*$ или просто $\Lambda\alpha$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha^* & \vdash & \Lambda\beta.\, \lambda x^\alpha y^\beta.\, x : \forall\beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\ & \vdash & \Lambda\alpha\, \beta.\, \lambda x^\alpha y^\beta.\, x : \forall\alpha\, \beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \end{array}$$

Универсальная абстракция по Чёрчу: типизация

- Правило введения $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\boxed{\frac{\Gamma, \alpha^* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash {\color{red}\Lambda\alpha.}\, M : \forall\alpha.\, \sigma}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\Gamma, \alpha^* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash {\color{red}\lambda\alpha^*.}\, M : \forall\alpha.\, \sigma}}$$

- Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.
- На прошлом слайде мы показали, что в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\mathbf{K} \equiv \Lambda\alpha\,\beta.\,\lambda x^{\alpha}\,y^{\beta}.\,x, \qquad \mathbf{K} : \forall\alpha\,\beta.\,\alpha \to \beta \to \alpha$$

- Аналогично для $\mathbf{I}$

$$\begin{array}{ccl} \alpha^* & \vdash & \lambda x^{\alpha}.\,x : \alpha \to \alpha \\ & \vdash & \Lambda\alpha.\,\lambda x^{\alpha}.\,x : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha \end{array}$$

$$\mathbf{I} \equiv \Lambda\alpha.\,\lambda x^{\alpha}.\,x, \quad \vdash \mathbf{I} : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha$$

- Удаление $\forall$ тоже должно отражаться на терме.

$$\begin{array}{rcl} \gamma^* & \vdash & (\Lambda\alpha.\,\Lambda\beta.\,\lambda x^{\alpha}.\,\lambda y^{\beta}.\,x) : \forall\alpha.\,\forall\beta.\,\alpha\to\beta\to\alpha \\ \gamma : * & \vdash & (\Lambda\alpha.\,\Lambda\beta.\,\lambda x^{\alpha}.\,\lambda y^{\beta}.\,x)\,\gamma : [\alpha := \gamma](\forall\beta.\,\alpha\to\beta\to\alpha) \end{array}$$

  На уровне типов это делается через подстановку типа, а на уровне термов — через ***универсальное применение***.

- Универсальное применение порождает новый способ редукции $(\Lambda\alpha.\,M)\,\sigma \to_\beta [\alpha := \sigma]\,M$

$$\begin{array}{rcl} \gamma^* & \vdash & (\Lambda\beta.\,\lambda x^{[\alpha:=\gamma]\alpha}.\,\lambda y^{\beta}.\,x) : \forall\beta.\,\gamma\to\beta\to\gamma \\ \gamma^*, \delta^* & \vdash & (\Lambda\beta.\,\lambda x^{\gamma}.\,\lambda y^{\beta}.\,x)\,(\delta\to\delta) : [\beta := \delta\to\delta](\gamma\to\beta\to\gamma) \\ \gamma^*, \delta^* & \vdash & (\lambda x^{\gamma}.\,\lambda y^{\delta\to\delta}.\,x) : \gamma\to(\delta\to\delta)\to\gamma \end{array}$$

- Можно ли здесь ввести понятие η-редукции?

- Правило удаления $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \qquad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M\, \tau : [\alpha := \tau]\sigma}$$

- Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.
- На прошлом слайде мы показали, что в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\begin{array}{rcl} & \vdash & \mathbf{K} : \forall \alpha\, \beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\ \gamma{:}*, \delta{:}* & \vdash & \mathbf{K}\, \gamma\, (\delta \to \delta) : \gamma \to (\delta \to \delta) \to \gamma \end{array}$$

- Аналогично для $\mathbf{I} \equiv \Lambda \alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x$ имели $\vdash \mathbf{I} : \forall \alpha.\, \alpha \to \alpha$ и

$$\gamma{:}* \;\vdash\; \mathbf{I}\, \gamma : \gamma \to \gamma$$

$$\mathbf{I}\, \gamma \equiv (\Lambda \alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x)\, \gamma \;\to_\beta\; \lambda x^{\gamma}.\, x$$

- Предтермы:

$$\Upsilon_{\mathbb{T}} = V \mid \Upsilon_{\mathbb{T}}\Upsilon_{\mathbb{T}} \mid \Upsilon_{\mathbb{T}}\mathbb{T} \mid \lambda V^{\mathbb{T}}.\,\Upsilon_{\mathbb{T}} \mid \Lambda\mathbb{V}.\,\Upsilon_{\mathbb{T}}$$

- Редукция:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda x^{\sigma}.\,M)\,N & \to_{\beta} & [x := N]\,M \\ (\Lambda\alpha.\,M)\,\sigma & \to_{\beta} & [\alpha := \sigma]\,M \end{array}$$

  Во втором виде редукций подстановка происходит в типы. «Базовая» структура терма не меняется.

(начальное)	$$\frac{x : \sigma \in \Gamma \quad \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x : \sigma}$$
(удаление $\to$)	$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\, N : \tau}$$
(введение $\to$)	$$\frac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau \quad \Gamma \Vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash \lambda x^{\color{red}\sigma}.\, M : \sigma \to \tau}$$
(удаление $\forall$)	$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \quad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M\, {\color{red}\tau} : [\alpha := \tau]\sigma}$$
(введение $\forall$)	$$\frac{\Gamma, \alpha^{*} \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash {\color{red}\Lambda \alpha.}\, M : \forall \alpha.\, \sigma}$$

Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.

Напомним, что $\top \equiv \forall\alpha.\,\alpha\to\alpha$, тогда для $\Gamma \equiv f^{\top}, \beta^{*}$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \top \qquad \Gamma \Vdash \beta\to\beta : *}{\Gamma \vdash f\,(\beta\to\beta) : (\beta\to\beta)\to\beta\to\beta}\,(\forall E) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f : \top \qquad \Gamma \Vdash \beta : *}{\Gamma \vdash f\,\beta : \beta\to\beta}\,(\forall E)}{\dfrac{f^{\top}, \beta^{*} \vdash f\,(\beta\to\beta)(f\,\beta) : \beta\to\beta}{\dfrac{f^{\top} \vdash \Lambda\beta.\,f\,(\beta\to\beta)(f\,\beta) : \forall\beta.\,\beta\to\beta}{\vdash \lambda f^{\top}.\,\Lambda\beta.\,f\,(\beta\to\beta)(f\,\beta) : \top\to\top}\,(\to I)}\,(\forall I)}\,(\to E)$$

Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.

Импредикативность

Типизируем самоприменение совсем по-другому:

$$\dfrac{\dfrac{f^{\top} \vdash f : \top \qquad \Gamma \Vdash \top : *}{f^{\top} \vdash \color{red}{f\,\top} : \top \to \top}\,(\forall E) \qquad f^{\top} \vdash f : \top}{\dfrac{f^{\top} \vdash f\,\top\,f : \top}{\vdash \lambda f^{\top}.\,f\,\top\,f : \top}\,(\to I)}\,(\to E)$$

Красным выделено ***импредикативное*** применение:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \forall\alpha.\,\color{blue}{\alpha} \to \color{green}{\alpha} \\ f\,(\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha) & : & \color{blue}{(\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha)} \to \color{green}{(\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha)} \end{array}$$

План лекции

- Можно задать стирающее отображение $|\cdot| : \Upsilon_{\mathbb{T}} \to \Lambda$:

$$\begin{array}{rcl} |x| & \equiv & x \\ |M\,N| & \equiv & |M|\,|N| \\ |M\,\sigma| & \equiv & |M| \\ |\lambda x^{\sigma}.\,M| & \equiv & \lambda x.\,|M| \\ |\Lambda\alpha.\,M| & \equiv & |M| \end{array}$$

- Все термы из версии Чёрча λ2 «проектируются» в термы в версии Карри:

$$M \in \Upsilon_{\mathbb{T}} \ \wedge \ \Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash_{\text{к}} |M| : \sigma$$

- Термы из версии Карри λ2 могут быть «подняты» в термы из версии Чёрча:

$$M \in \Lambda \ \wedge \ \Gamma \vdash_{\text{к}} M : \sigma \ \Rightarrow \ \exists N \in \Upsilon_{\mathbb{T}}\, [\Gamma \vdash_{\text{ч}} N : \sigma \ \wedge \ |N| \equiv M]$$

Проблемы разрешимости для $\lambda 2$ а ля Чёрч

- **ЗПТ** $\vdash M : \sigma?$ **и ЗСТ** $\vdash M : ?$.
  Для $\lambda 2$ а ля Чёрч — разрешимы, в отличие от сильной $\lambda 2$ а ля Карри.
- **ЗОТ** $\vdash ? : \sigma$.
  Неразрешима. (Соответствует *доказуемости* в PROP2, для которой факт неразрешимости известен.)

Свойства λ2

- Единственность типа (для λ2 в стиле Чёрча):
  Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$. Тогда $\sigma \equiv \tau$.
- Редукция субъекта
  Пусть $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash N : \sigma$.
- Сильная нормализуемость
  Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$. Тогда любая последовательность β-редукций приводит к нормальной форме за конечное число шагов.

План лекции

- Найдите замкнутую версию комбинаторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{B}$ и запишите их тип. Сколько разных версий можно написать?
- Определите тип терма

$$\lambda x^{\perp}.\, x\,(\perp \to \perp \to \perp)\;(x\,(\perp \to \perp)\;x)\;(x\,(\perp \to \perp \to \perp)\;x\;x)$$

- Придумайте контекст Γ, в котором верны утверждения типизации

$$\begin{array}{lll}
\Gamma & \vdash & x : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,\beta : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,\beta : (\beta \to \beta) \to \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,((\beta \to \beta) \to \beta)\;(x\,(\beta \to \beta)) : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta \to \beta)\;(x\,\beta) : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta \to \beta)\;(x\,\beta) : \beta \to \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta \to \beta \to \beta)\;(x\,\beta)\;(x\,\beta) : \beta \to \beta \to \beta
\end{array}$$

$\lambda 2$ в стиле Чёрча: булевы значения

- Каков тип булевых значений (`Bool`)

$$\begin{aligned} \texttt{tru} &\equiv \Lambda\alpha.\,\lambda\, t^{\alpha}\, f^{\alpha}.\, t \\ \texttt{fls} &\equiv \Lambda\alpha.\,\lambda\, t^{\alpha}\, f^{\alpha}.\, f \end{aligned}$$

- Реализуйте комбинаторы `not`, `ifThenElse`, `and` и укажите их типы.

- Тип чисел Черча $\mathtt{Nat} = \forall\alpha.\,(\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$:

$$
\begin{array}{lcl}
0 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, z \\
1 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\, z \\
2 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\, z) \\
3 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\,(s\, z)) \\
4 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\,(s\,(s\, z))) \\
 & \dots &
\end{array}
$$

- Заполните пропуски типами и укажите тип комбинатора

$$\mathtt{iszro} \;\equiv\; \lambda\, n^{\mathtt{Nat}}.\, n\,[\bullet]\,(\lambda\, x^{[\bullet]}.\,\mathtt{fls})\;\mathtt{tru}$$

- Определим комбинатор следования так

$$\mathtt{succ} \;\equiv\; \lambda n^{\mathtt{Nat}}.\,\Lambda\beta.\,\lambda s^{\beta\to\beta}.\,\lambda z^{\beta}.\, s\,(n\,\beta\, s\, z)$$

Проверьте, что (1) его тип $\mathtt{Nat}\to\mathtt{Nat}$; (2) $\mathtt{succ}\;0 =_\beta 1$ и $\mathtt{succ}\;1 =_\beta 2$.

- Определим комбинатор сложения так

$$\mathtt{plus} \;\equiv\; \lambda m^{\mathtt{Nat}} n^{\mathtt{Nat}}.\, \Lambda\beta.\, \lambda s^{\beta\to\beta}.\, \lambda z^{\beta}.\, m\,\beta\,s\,(n\,\beta\,s\,z)$$

  Проверьте, что (1) его тип $\mathtt{Nat} \to \mathtt{Nat} \to \mathtt{Nat}$; (2) $\mathtt{plus}\ 1\ 1 =_{\beta} 2$.

- Бестиповой комбинатор умножения определялся одним из следующих способов

$$\begin{aligned} \mathtt{mult1} &\equiv \lambda m\,n.\, m\,(\mathtt{plus}\ n)\ 0 \\ \mathtt{mult2} &\equiv \lambda m\,n\,s\,z.\, m\,(n\,s)\,z \\ \mathtt{mult3} &\equiv \lambda m\,n\,s.\, m\,(n\,s) \end{aligned}$$

  Типизируйте эти определения в λ2 в стиле Черча.

- Заполните пропуски типами и укажите тип комбинатора

$$\mathtt{pow} \;\equiv\; \lambda m^{\mathtt{Nat}}\, n^{\mathtt{Nat}}.\, \Lambda\beta.\, n\,[\bullet]\,(m\,[\bullet])$$

  Почему этот комбинатор не имел типа в системе $\lambda_{\to}$?

$\lambda 2$ в стиле Чёрча: пары, суммы, списки

- Каков тип пар ($\mathtt{Pair}\,\sigma\,\tau$)

$$\mathtt{pair} \equiv \lambda x^{\sigma}.\,\lambda y^{\tau}.\,\Lambda\alpha.\,\lambda f^{\sigma\to\tau\to\alpha}.\,f\,x\,y$$

- Реализуйте комбинаторы `fst`, `snd` и укажите их тип.
- Каков тип суммы типов ($\mathtt{Either}\,\sigma\,\tau$)? Реализуйте термы описывающие его введение и удаление.
- Каков тип списка ($\mathtt{List}\,\sigma$)? Реализуйте термы описывающие его введение и удаление.

- Напомним реализацию функция предшествования для чисел Черча:

$$\begin{aligned}
\mathtt{zp} &\equiv \mathtt{pair}\ 0\ 0 \\
\mathtt{sp} &\equiv \lambda p.\, \mathtt{pair}\ (\mathtt{snd}\ p)\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{snd}\ p)) \\
\mathtt{pred} &\equiv \lambda m.\, \mathtt{fst}\ (m\ \mathtt{sp}\ \mathtt{zp})
\end{aligned}$$

  Типизируйте комбинаторы $\mathtt{zp}$, $\mathtt{sp}$ и $\mathtt{pred}$.

- Обобщение предыдущей схемы дает комбинатор примитивной рекурсии

$$\begin{aligned}
\mathtt{xz} &\equiv \lambda x.\, \mathtt{pair}\ x\ 0 \\
\mathtt{fs} &\equiv \lambda f\, p.\, \mathtt{pair}\ (f\ (\mathtt{fst}\ p)\ (\mathtt{snd}\ p))\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{snd}\ p)) \\
\mathtt{rec} &\equiv \lambda m\, f\, x.\, \mathtt{fst}\ (m\ (\mathtt{fs}\ f)\ (\mathtt{xz}\ x))
\end{aligned}$$

  Типизируйте комбинаторы $\mathtt{xz}$, $\mathtt{fs}$ и $\mathtt{rec}$.

Кодирование «кванторa существования» (Σ-типа)

- Пусть имеется произвольный тип σ, такой что $\alpha \in FV(\sigma)$. Введем типовую конструкцию

$$\exists\alpha.\,\sigma \;\equiv\; \forall\beta.\,(\forall\alpha.\,\sigma \to \beta) \to \beta$$

- Терм, который населяет обозначим

$$\langle\gamma, y\rangle \;\equiv\; \Lambda\beta.\,\lambda x^{\forall\alpha.\,\sigma\to\beta}.\,x\,\gamma\,y$$

- Какой тип имеет y в этом выражении?
- (*) Попробуйте найти правило удаления для $\exists\alpha.\,\sigma$.