

Графы

1. Рассмотрим произвольную смежную пару вершин $\{x, y\}$ в простом графе G на n вершинах. Доказать, что ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\deg(x) + \deg(y) - n$ треугольникам в графе G .
2. По последовательностям $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$ и $(5, 5, 4, 3, 3, 2)$ построить связные графы с минимальным количеством петель и мультиребер. Можно ли по ним построить простые графы? Если да, то предъявить подобное построение, по возможности, наиболее простое.
3. Доказать, что последовательность

$$(n, n, n - 1, n - 1, \dots, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

всегда является графовой.

4. Пусть M_a и M_i — матрицы смежности и инцидентности простого графа G . Чему равны диагональные коэффициенты матриц M_a^2 и $M_i M_i^t$, где M_i^t — транспонированная к M_i матрица? Как связаны недиагональные элементы матриц $M_i M_i^t$ и M_a ?
5. Доказать, что для произвольного турнира T справедливо равенство

$$\sum_{x \in V(T)} \text{outdeg}(x)^2 = \sum_{x \in V(T)} \text{indeg}(x)^2.$$

6. Неубывающая последовательность чисел

$$\mathbf{s}_1 := (s_1, s_2, \dots, s_n) : \quad s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq n - 1 \quad (1)$$

называется последовательностью количества очков (score sequence), если существует турнир T , построенный на n вершинах, для которого $\text{outdeg}(x_i) = s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Доказать, что для любой последовательности (1) количества очков справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq \binom{k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1; \quad \sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}. \quad (2)$$

7. (2 балла) Доказать, что условия (2) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы неубывающая последовательность (1) была последовательностью количества очков.

Указание. Один из возможных способов доказательства достаточности этого факта — индукция по числу

$$t := \sum_{k=1}^n t_k, \quad t_k := \sum_{i=1}^k s_i - \binom{k}{2}.$$

В процессе доказательства нужно показать, что существуют индексы $r < k$, такие, что $s_r - s_{r-1} \geq 2$ и $s_{k+1} - s_k \geq 2$, уменьшить s_r на единицу, увеличить s_k на единицу, и воспользоваться индукционным предположением.