

Математическая логика

Практика 07

Общезначимые формулы логики предикатов

25 марта 2021г.

Общезначимые формулы логики предикатов

Разминка. Будут ли корректны следующие подстановки терма τ вместо x в формулу φ :

- $\tau = f(x, y)$, $\varphi = \forall y \neg P(x, y) \wedge Q(x, z)$
- $\tau = g(y, z)$, $\varphi = P(x, y) \rightarrow \exists x \neg Q(x)$

ПНФ и сколемизация. Напомним некоторые полезные общезначимые формулы.

$$\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$$

$$\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$$

$$\forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \leftrightarrow \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$$

$$\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$$

$$\exists x\varphi(x) \wedge \psi \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\forall x\varphi(x) \vee \psi \leftrightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \psi \leftrightarrow \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\forall x\varphi(x) \rightarrow \psi \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\psi \rightarrow \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x(\psi \rightarrow \varphi(x)), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\psi \rightarrow \exists x\varphi(x) \leftrightarrow \exists x(\psi \rightarrow \varphi(x)), \quad x \notin FV(\psi)$$

$$\forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x\psi(x) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$$

Def. Говорят, что предваренная формула является Σ_n -**формулой** если ее кванторная приставка содержит n групп кванторов, причем первыми стоят кванторы существования. Если первыми стоят кванторы всеобщности, то формула является, соответственно, Π_n -**формулой**.

Задания

1. Покажите, что эти формулы с лекции общезначимы

- $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x)$
- $\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$

2. Постройте ПНФ формул и сколемизируйте результат до Π_1 .

- $\neg\exists x\forall y\exists z\forall uP(x, y, z, u)$
- $\exists x\forall yQ(x, y) \wedge \exists x\forall yR(x, y)$

Домашнее задание

1. (16.) Покажите, что эта формула из лекции является общезначимой:

$$(\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x)) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$$

2. В некоторых общезначимых формулах выше, мы наложили условие на свободное вхождение переменной, захваченной квантором. Например:

$$\exists x\varphi(x) \wedge \psi \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi), \quad x \notin FV(\psi)$$

Для каждой такой формулы уберите это требование и докажите, что получившаяся формула необщезначима. Напомню, что для доказательства необщезначимости необходимо привести пример интерпретации и означивания, на котором формула обращается в ложь. (0.5 балла за каждую формулу)

3. Постройте ПНФ формул и сколемизируйте результат до Π_1 :

(a) (16.) $\exists x\forall yP(x, y) \vee \exists x\forall yQ(x, y)$

(b) (16.) $\exists x\forall yP(x, y) \rightarrow \exists x\forall yQ(x, y)$

(c) (26.) $\exists x\forall yP(y) \rightarrow \neg\exists zS(z) \wedge \exists yQ(x, y)$