ДЗ2. Комбинаторика. Биномиальные коэффициенты.

1. Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству
$$x^2 + xy = 30000000.$$

2. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске белую ладью и черного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью?

3. Сколько натуральных чисел в диапазоне от 1 до 500 имеют ровно три различных натуральных делителя?

4. Подсчитайте количество различных пар натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству
$$\gcd(x, y) + lcm(x, y) = 113.$$
Здесь $\gcd(x, y)$ — наибольший общий делитель чисел x и y, то есть наибольшее целое число d, делящее числа x и y, а $lcm(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y, то есть наименьшее натуральное число l, которое делится на x и y без остатка.

5. Дайте комбинаторное доказательство равенства
$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \binom{n}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

6. Докажите комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}. \tag{1}$$

7. Дайте комбинаторное доказательство тождества
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

8. Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины n, содержащих k единиц? А бинарных строк длины n, содержащих k единиц и таких, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

9. Докажите равенство

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \binom{n+1}{k+1}.$$

1. Дополнительные задачи

Сложная задача с международной студенческой олимпиады, решать её не обязательно, но за решение вы получите 5 дополнительных баллов.

(a) Найдите количество слов длины n, состоящих из букв a, b, c, d, в которых четное количество букв a и букв b. Ответ в данной задаче должен быть без знаков суммирования.