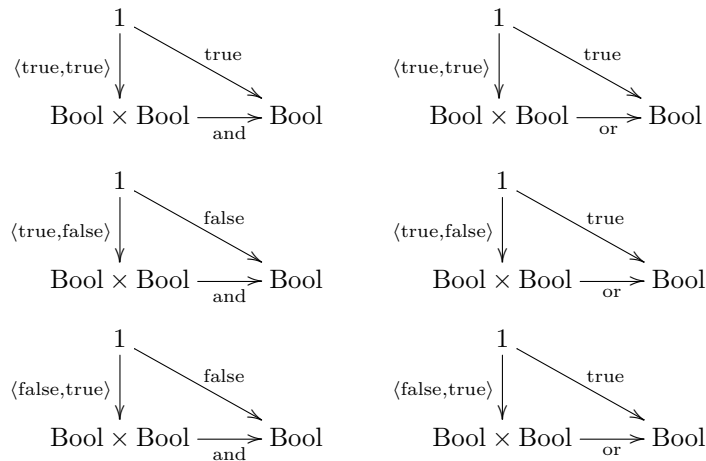
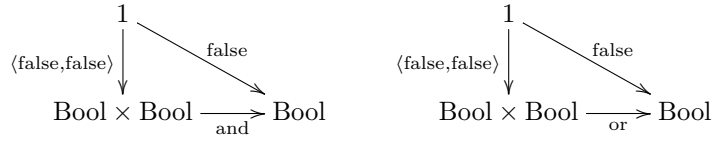


Задания

5 февраля 2019 г.

1. При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?
2. Приведите пример нетривиальной категории порядка, являющейся декартово замкнутой.
3. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.
 - (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.
 - (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).
 - (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.
4. Пусть в категории \mathbf{C} есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в \mathbf{C} морфизмы $\text{and}, \text{or} : \text{Bool} \times \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$, такие что следующие диаграммы коммутуют





5. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

Пусть \mathbf{C} – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- (a) \mathbf{C} – категория предпорядка.
 - (b) В \mathbf{C} терминальный объект является булевским.
 - (c) В \mathbf{C} существует булевский объект, такой что $\text{true} = \text{false}$.
6. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории \mathbf{C} выполнены следующие утверждения:

- (a) Для любого объекта A существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.
- (b) Для любых объектов A, B и C существует изоморфизм $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$.
- (c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов A, B и C морфизм

$$[\langle \pi_1, \text{inj}_1 \circ \pi_2 \rangle, \langle \pi_1, \text{inj}_2 \circ \pi_2 \rangle] : (A \times B) \amalg (A \times C) \rightarrow A \times (B \amalg C)$$

является изоморфизмом, где $\text{inj}_1 : B \rightarrow B \amalg C$ и $\text{inj}_2 : C \rightarrow B \amalg C$ – канонические морфизмы копроизведения, и если $f : B \rightarrow X, g : C \rightarrow X$, то $[f, g] : B \amalg C \rightarrow X$ – уникальный морфизм, удовлетворяющий $[f, g] \circ \text{inj}_1 = f$ и $[f, g] \circ \text{inj}_2$.

- (d) Если в \mathbf{C} существует начальный объект 0 , то для любого объекта A существует изоморфизм $A^0 \simeq 1$.
- (e) Если в \mathbf{C} существует копроизведение $B \amalg C$, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$.

7. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевским.

8. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы K и S , то есть следующие морфизмы:

$$\begin{aligned}
 K &: A \rightarrow A^B \\
 S &: (C^B)^A \rightarrow (C^A)^{(B^A)}
 \end{aligned}$$

9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.
10. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого x не верно, что $\text{zero} = \text{suc}(x)$. В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.
- \mathbf{C} – категория предпорядка.
 - В \mathbf{C} терминальный объект является объектом натуральных чисел.
 - В \mathbf{C} существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x : 1 \rightarrow \mathbb{N}$ верно, что $\text{zero} = \text{suc} \circ x$.
 - В \mathbf{C} существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x : 1 \rightarrow \mathbb{N}$ верно, что $\text{zero} = \text{suc} \circ x$.
11. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} & & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N} \\
 \langle \text{zero} \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle \downarrow & \searrow id_{\mathbb{N}} & \downarrow \text{suc} \\
 \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{+} & \mathbb{N}
 \end{array}$$

Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\langle \pi_2, \pi_1 \rangle} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 & \searrow + & \downarrow + \\
 & & \mathbb{N} \times \mathbb{N}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & \xrightarrow{id_{\mathbb{N}} \times +} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 + \times id_{\mathbb{N}} \downarrow & & & & \downarrow + \\
 \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{+} & & & \mathbb{N}
 \end{array}$$

12. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.

В качестве примера к последней задаче давайте сконструируем морфизм умножения. Это морфизм $*$, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{!_{\mathbb{N}}} & 1 \\ \langle \text{zero}!_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle \downarrow & & \downarrow \text{zero} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{*} & \mathbb{N} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{id_{\mathbb{N}} \times \langle id_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle} & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & \xrightarrow{\simeq} & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} & \xrightarrow{* \times id_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \downarrow \text{suc} \times id_{\mathbb{N}} & & & & & & \downarrow + \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & & \mathbb{N} \end{array}$$

Чтобы его сконструировать возьмем в определении натуральных чисел $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В качестве $z : 1 \rightarrow X$ возьмем морфизм, по каррированию соответствующий функции $\mathbb{N} \rightarrow 1 \xrightarrow{\text{zero}} \mathbb{N}$. В качестве $s : X \rightarrow X$ возьмем морфизм, по каррированию соответствующий следующей функции:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \xrightarrow{id_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \times \langle id_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \simeq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \xrightarrow{ev \times id_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}.$$

Тогда коммутирование двух частей диаграммы в определении \mathbb{N} эквивалентно коммутированию двух диаграмм в определении $*$.