Математическая логика

Практика 09
Невыразимые предикаты
Секвенциальное исчисление предикатов

15 апреля 2021г.

Невыразимые предикаты

Пусть у нас есть сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D. Мы могли доказать выразимость предиката в ней прямым предъявлением. Например, у нас был язык элементарной арифметики со стандартной интерпретацией, в котором мы могли выразить порядок на натуральных числах вот так:

$$x \leqslant y \equiv \exists z(y = x + z)$$

Если поменять носитель интерпретации на $\mathbb{Z}$, то это уже не работает, порядок станет невыразимым.

$\mathfrak{Def}$. *Биекция $\alpha\colon D \to D$ называется* ***автоморфизмом*** *интерпретации, если все функции и предикаты устойчивы относительно нее. Именно, для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n выполняется:*

$$[P](\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) \Leftrightarrow [P](x_1, \dots, x_n)$$
$$[f](\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = \alpha([f](x_1, \dots, x_n))$$

на любых наборах $x_1, \dots, x_n \in D$

$\mathfrak{Prop}$. *Предикат, выразимый в данной сигнатуре устойчив относительно ее автоморфизмов.*

То есть мы получили возможность доказывать невыразимость предиката, предъявив автоморфизм, относительно которого он неустойчив.

Далее давайте посмотрим на несколько примеров невыразимых предикатов, попробуем везде предъявить автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.

- (Это пример с лекции). Сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, стандартная интерпретация. Невыразимый предикат – $x = 0$. Рассмотрим в качестве α функцию, которая прибавляет единицу к своему аргументу($\alpha(x) = x+1$). Заметим, что если $x < y$, то $x+1 < y+1$ и если $x = y$, то $x+1 = y+1$(стрелки в обратную сторону так же работают). Однако теперь $P(\alpha(0)) \equiv 1 = 0 \not\Leftrightarrow P(0) \equiv 0 = 0$

- Сигнатура $(+^2, =^2, <^2)$, носитель $\mathbb{Q}$, стандартная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 1$. Кроме того, есть ли здесь выразимый предикат вида $x = C$? Давайте рассмотрим в качестве α функцию, которая умножает свой аргумент на два($\alpha(x) = 2x$). Что тогда произойдет? Сложение все еще работает($2x + 2y = 2(x+y)$), отношение меньше и равно так же не сломались, а вот равенство единице уже не работает. Заметим, что мы сломали еще и равенства не только единице, но и вообще любой константе(кроме нуля). Почему здесь не подходит пример из предыдущего пункта? Потому что тогда сломается сложение($x+1+y+1$ – это не то же самое, что $x+y+1$)

- Сигнатура $(0^0, 1^0, <^2, =^2)$, носитель $\mathbb{R}$, стандартная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 1/2$. Здесь уже сложнее, нам надо чтобы наш автоморфизм сохранял ноль и единицу, следовательно прибавление константы и умножение нам уже не поможет. Рассмотрим тогда в качестве $\alpha(x) = x^3$. Возведение в степень сохраняет ноль и единицу и отношение меньше, а равно тем более

Секвенциальное исчисление предикатов

Напомним некоторые правила в исчислении секвенций
Схема аксиом:

$$A, \Gamma \vdash A, \Delta$$

Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\,(\wedge \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,(\vdash \wedge)$$

Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\,(\vee \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vdash \vee)$$

Правила введения импликации в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}\,(\to\vdash) \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,(\vdash\to)$$

Правила введения отрицания в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\,(\neg \vdash) \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\vdash \neg)$$

Правила введения квантора существования в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A[x := y], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta}\,(\exists \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := \tau], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\,(\vdash \exists)$$

Правила введения квантора всеобщности в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A[x := \tau], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta}\,(\forall \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\,(\vdash \forall)$$

NB: Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ. От всех подстановок требуется корректность.

Задания. Везде требуется построить дерево вывода для данной формулы в секвенциальном исчислении предикатов.

- $\vdash \exists x P(x) \to \exists y P(y)$
- $\vdash \exists x (P(x) \vee Q(x)) \to \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- $\vdash \forall x Q(x, x) \to \forall x \exists y Q(x, y)$
- $\forall x (P(g(x)) \to P(x)) \vdash \forall x (P(g(g(x))) \to P(x))$

Домашнее задание

1. Покажите, что заданый предикат невыразим в заданой сигнатуре.

   (a) (2б.) Сигнатура $(f^1, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, нормальная интерпретация, $[f](x) = x + 2$. Предикат – $y = x + 1$.

   (b) (2б.) Сигнатура $(P^2, =^2)$, носитель $\mathbb{N}_+$, нормальная интерпретация, $[P](x, y) = x$ делит y. Предикат – $x = 2$.

2. (2б.) В этом пункте имеется в виду второй пример про невыразимые предикаты. Верно ли, что если поменять носитель интерпретации на $\mathbb{R}$, то предикат перестанет быть невыразимым? А если поменять носитель на $\mathbb{Z}$?

3. Везде требуется построить дерево вывода(или дерево поиска контрпримера) для данной формулы в секвенциальном исчислении предикатов(можно использовать Logitext):

   (a) (1б.)$\vdash \exists y \forall x Q(x, y) \to \exists x Q(x, x)$

   (b) (2б.)$\vdash \exists x (P(y) \vee P(f(z)) \to P(x))$

   (c) (2б.)$\vdash \exists x \forall y (P(x) \to P(y))$