7 Решение упражнений

7.1. Разобъем множество перестановок элементов $\{1, \ldots, n+1\}$, содержащих ровно k циклов, на два блока. В первый блок поместим перестановки, в которых элемент $(n+1)$ содержится в цикле длины 1, а во второй — перестановки, в которых этот элемент содержится в циклах длины, большей единице.

Очевидно, что количество перестановок в первом блоке равно $c(n, k-1)$. Покажем, что количество элементов во втором блоке равно $n \cdot c(n, k)$.

Действительно, любая перестановка из второго блока может быть получена добавлением числа $(n+1)$ в один из k циклов перестановки n-элементного множества. Всего имеется $c(n, k)$ таких перестановок. Заметим теперь, что в любой из циклов длины n_i число $(n+1)$ можно вставить ровно n_i числом способов. Всего же, таким образом, имеется $n_1 + \ldots + n_k = n$ способов вставить число $(n+1)$ в перестановку первых n чисел.

7.2. Данное равенство имеет следующий комбинаторный смысл: количество $c(n, k)$ способов получить перестановку, содержащую ровно k циклов, равно количеству способов разбить n-множество на два блока размерами i и $(n-i)$, единственным способом построить в первом блоке i циклов единичной длины, а во втором блоке $d(n-i, k-i)$ способами построить перестановку $(n-i)$-элементного множества, содержащую $(k-i)$ циклов, длина каждого из которых больше или равна двум.

7.3. Числа $d_{n+1,k}$ описывает количество перестановок множества $[n+1]$, имеющих ровно k циклов длины, большей или равной 2. Рассмотрим теперь элемент $n+1$. Если этот элемент содержится в цикле длины, большей или равной трем, то мы можем удалить этот элемент и получить перестановку множества $[n]$ без единичных циклов. Обратно, элемент $n+1$ можно n способами вставить в один из k циклов перестановки множества $[n]$ без единичных циклов. Кроме того, элемент $n+1$ может лежать в цикле длины 2 с одним из элементов i, $i = 1, \ldots, n$. Удаляя элемент $n+1$, и заменяя в оставшейся перестановке элемент n на элемент i, мы получаем некоторую перестановку множества $[n-1]$ без единичных циклов. Наоборот, выбрав произвольную перестановку без единичных циклов множества $[n-1]$, добавив к ней цикл $(n, n+1)$, мы получаем правильную перестановку множества $[n+1]$. Меняя теперь n на i, $i = 1, \ldots, n-1$, мы получим еще $n-1$ правильную перестановку множества $[n+1]$. Итак, у нас имеется n способов получить из правильной перестановки множества $[n-1]$ с $(k-1)$-м циклом перестановку множества $[n+1]$ с k циклами.

7.4. Рассмотрим произвольную перестановку n-элементного множества, имеющую k циклов, в которой каждый из k_i циклов содержит ровно i элементов. Переставим n элементов этого множества всеми возможными $n!$ способами. Имеются две причины, по которым не все получающиеся в результате такой операции перестановки будут различными.

Рассмотрим, прежде всего, k_i циклов размера i. Так как порядок циклов роли не играет, то мы всегда $k_i!$ способами можем переставить эти циклы и получить ту же самую перестановку σ. Далее, внутри каждого цикла мы i способами можем выбрать первый элемент, идущий в цикле. Следовательно, для k_i циклов длины i имеется i^{k_i} способов переставить элементы в них так, чтобы в результате получилась та же самая перестановка σ.

7.5. Действительно, для получения перестановки, содержащей ровно k неподвижных элементов, нам следует $\binom{n}{k}$ способами выбрать элементы, которые остаются неподвижными, а затем D_{n-k} способами перемешать оставшиеся $(n-k)$ элемента.

Заметим теперь, что на языке производящих функций равенство $D(n,k)=\binom{n}{k}D_{n-k}$ выглядит так:

$$D(z,t)=e^{tz}\cdot D(z) \qquad \Longrightarrow \qquad D(z,t)=\frac{e^{-z}}{1-z}\cdot e^{tz}=\frac{e^{z(t-1)}}{1-z}.$$

7.6. Очевидно, что все такие перестановки должны состоять из циклов, длина которых делит r. Выбирая в экспоненциальной формуле коэффициенты

$$\begin{aligned} a_d &= 0, && \text{если} \quad d \nmid r, \\ a_d &= (d-1)! && \text{если} \quad d \mid r, \end{aligned}$$

мы для указанных перестановок получаем производящую функцию вида

$$C^{(r)}(z)=\exp\left(\sum_{d=1}^{\infty} a_d\,\frac{z^d}{d!}\right)=\exp\left(\sum_{d|r}\frac{z^d}{d}\right).$$

Для случая инволюций $r=2$, и потому

$$C^{(2)}(z)=e^{z+z^2/2}.$$

Наконец, инволюциям без неподвижных точек отвечает производящая функция

$$\widetilde{C}^{(2)}(z)=e^{z^2/2}=1+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z^2}{2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{z^2}{2}\right)^n+\ldots,$$

откуда сразу же получаем, что количество таких перестановок

$$\widetilde{C}^{(2)}_n=\frac{1}{n!\,2^n}\cdot(2n)!=(2n-1)!!$$

7.7. Очевидно, что количество перестановок, имеющих только нечетные циклы, описывается производящей функцией вида

$$G_{odd}(z)=\exp\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\ldots\right)=e^{F_{odd}(z)}$$

Заметим теперь, что

$$F'_{odd}(z)=1+z^2+z^4+\ldots=\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right] \quad \Longrightarrow \quad F_{odd}(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\ln(1+z).$$

Следовательно,

$$G_{odd}(z)=\exp\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\ln(1+z)\right]=\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$