# Группа 1. Домашнее задание на 23 января 1 часть

**1.** (1) Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, дифференцируема на интервале $(0, 1)$ и удовлетворяет условиям: $f(0) = 5, f(1) = 3, f'(x) \geqslant -2$ для всех $x \in (0, 1)$.
Докажите, что $f$ — линейная на отрезке $[0, 1]$ функция.

**2.** Докажите следующие неравенства:

a) (1) $2 \operatorname{arctg} x \leqslant x - 1 + \frac{\pi}{2}, x \geqslant 0$

b) (1) $\ln(1 + x) > \frac{2x}{x+2}, x > 0$

c) (1) $x \ln x + y \ln y \geqslant (x + y) \ln \frac{x+y}{2}$

**3.**

a) (1.5) Докажите неравенство: $\frac{x \ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$ при $x > 0, x \neq 1$

b) (0.5) Сравните $2^{\sqrt{2}}$ и $e$

**4.** (*) (2) Функция $f$ имеет на $[0, +\infty)$ непрерывную производную и $f(0) = 1, |f(x)| \leqslant e^{-x}$ для всех $x \geqslant 0$. Докажите, что существует такая точка $\xi$, что $f'(\xi) = -e^{-\xi}$