

Дз 5. Вероятности + арифметика

Везде где применимо описывайте вероятностную модель, которой вы пользуетесь (элементарные исходы и известные вероятности).

1. (задача про двери, но дверей 1000) Есть 1000 дверей, за одной лежит приз. Вы выбираете дверь. После этого ведущий открывает какую-то дверь, но не ту, которую вы выбрали и не ту, за которой приз. После этого можно перевыбрать дверь. С какой наибольшей вероятностью можно угадать приз?
2. Предположим, что A и B — два различных подмножества одного и того же множества X , $|X| = n$, такие, что

$$A \cup B = X.$$

Из всех решений (A, B) этого уравнения случайным образом выбирают одно. Какова вероятность того, что A и B содержат ровно k , $k > n/2$, элементов?

3. Пусть $\Omega = \{H, T\}^3$ — результаты трех последовательных бросков монетки. Опишите минимальную по включению алгебру событий $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$, в которой есть события $A_3 =$ ”выпало 3 орла”, $A_1 =$ ”выпал только 1 орел”. Каков ее размер?
4. В урне находятся белые и черные шары общим количеством в n штук. Обозначим через A_k событие, состоящее в том, что в урне имеется ровно k , $k = 0, \dots, n$, белых шаров. Будем считать, что вероятности событий A_k одинаковы и равны $1/(1+n)$. Предположим, что мы вытащили белый шар. Найдите вероятность того, что в урне при этом лежало ровно k белых шаров.
5. Два равносильных шахматиста играют в матч из n результативных партий. Ничьи во внимание не принимаются. Что вероятнее: выиграть не менее половины из n_1 или не менее половины из n_2 ? (у этой задачи есть решение проще, чем посчитать вероятности)
6. Рассмотрим схему Бернулли из n испытаний, в которой вероятность p успеха является иррациональным числом. Найдите, при каком k , $k = 1, 2, \dots, n$, величина $\Pr(A_k)$ будет наибольшей.
7. xXxVasya228xXx играет дуэли в QС. Он выигрывает честного игрока с вероятностью 55% и проигрывает читеру с вероятностью 95%, при этом идеально сбалансированная система рейтинга удерживает его винрейт на 50%.
 - (a) Опишите множество элементарных событий, описывающее одну дуэль Васи.
 - (b) Какова доля читеров среди соперников Васи?
 - (c) Вася только что проиграл игру. Какова вероятность, что он проиграл читеру?
8. По многолетним наблюдениям, в Пулково из 30 ноябрьских ночей ясных бывает в среднем 10. Группе астрономов, собирающихся сделать мировое открытие, выделено 7 ночей для наблюдений. Найдите вероятность того, что мировое открытие будет совершено, если для этого требуется по крайней мере 3 ясные ночи.