

# Задания

16 апреля 2019 г.

1. Докажите, что лемму о подстановке для  $\wedge$ : для любых формул  $\varphi$  и  $\psi$ , таких что  $FV(\varphi) \cup FV(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ , и всех термов  $t_1, \dots, t_n$  верно, что  $\llbracket (\varphi \wedge \psi)[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \rrbracket$  является пулбэком  $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket$  вдоль  $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ . Можно пользоваться тем, что это верно для  $\varphi$  и  $\psi$  (по индукционной гипотезе).
2. Пусть  $\mathbf{C}$  – конечно полная категория. Тогда для любого морфизма  $f : A \rightarrow B$  можно определить функтор  $f^* : \text{Sub}(B) \rightarrow \text{Sub}(A)$ , где  $\text{Sub}(X)$  – полная подкатегория  $\mathbf{C}/X$ , объекты которой – это стрелки  $Y \rightarrow X$ , являющиеся мономорфизмами. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
  - (a) У любого морфизма  $f : A \rightarrow B$  существует образ  $\text{im } f \hookrightarrow B$ .
  - (b) Для любого морфизма  $f : A \rightarrow B$  у функтора  $f^*$  есть левый сопряженный функтор  $\exists_f : \text{Sub}(A) \rightarrow \text{Sub}(B)$ .
3. Докажите, что если  $(A, p_A)$  – объект  $\mathbf{C}/\Gamma$ , то категория  $\mathbf{C}/A$  изоморфна категории  $\mathbf{C}/\Gamma/(A, p_A)$ .
4. Докажите, что для любого морфизма  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  и мономорфизма  $p : A \hookrightarrow \Gamma$  стрелка  $\Pi_f(p)$  тоже является мономорфизмом.
5. Докажите, что если в локально декартово замкнутой регулярной категории существуют все конечные суммы, то она гейтингова.
6. Пусть  $\mathbf{C}$  – конечно полная категория
  - (a) Докажите, что для любого пулбэка

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & A \\ k \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

следующий квадрат коммутирует с точностью до изоморфизма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}/A & \xrightarrow{h^*} & \mathbf{C}/P \\ \Sigma_f \downarrow & & \downarrow \Sigma_k \\ \mathbf{C}/C & \xrightarrow{g^*} & \mathbf{C}/B \end{array}$$

(b) Если  $\mathbf{C}$  локально декартово замкнута, то следующий квадрат тоже коммутирует с точностью до изоморфизма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}/A & \xrightarrow{h^*} & \mathbf{C}/P \\ \Pi_f \downarrow & & \downarrow \Pi_k \\ \mathbf{C}/C & \xrightarrow{g^*} & \mathbf{C}/B \end{array}$$