8 Упражнения

8.1. Перечислите помеченные корневые деревья, ориентированные от корня, в которых каждая вершина либо не имеет потомков (является листом), либо имеет ровно k потомков.

8.2. Под ориентированным деревом мы будем понимать дерево, любому ребру которого приписана одна из двух возможных ориентаций. Перечислите все помеченные корневые и некорневые ориентированные деревья.

8.3. Рассмотрим корневые помеченные деревья, все ребра которых ориентированы от корня. Нас будет интересовать специальный класс таких деревьев, а именно, деревья, у которых любая вершина либо является листом, либо имеет двух и более потомков (lone-child-avoiding trees). Покажите, что экспоненциальная производящая функция $H(z)$ для таких деревьев удовлетворяет следующему уравнению:

$$H(z) = z \cdot (\exp(H(z)) - H(z)).$$

С помощью формулы обращения Лагранжа получите явное выражение для количества h_n этих деревьев.

8.4. Ранее мы с помощью аппарата производящих функций получили явную формулу для количества лесов на n вершинах, состоящих из k корневых деревьев. Выведите эту формулу, доказав следующее рекуррентное соотношение для количества $F_{n,k}$ таких лесов:

$$(n-k) \cdot F_{n,k} = k \cdot n \cdot F_{n,k+1}.$$

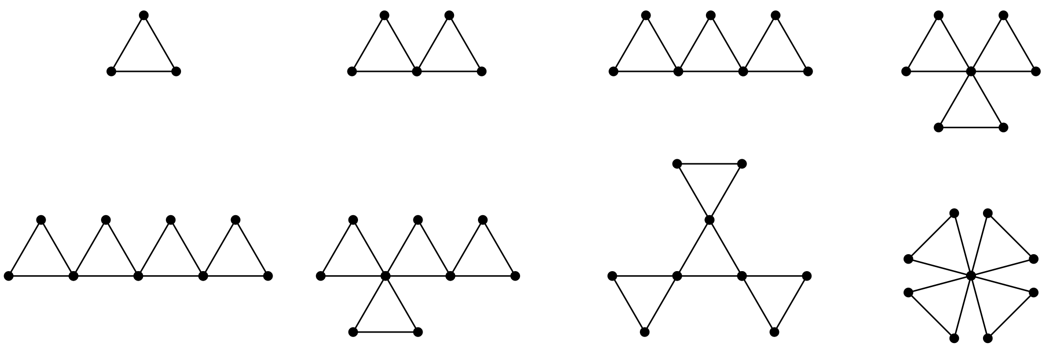


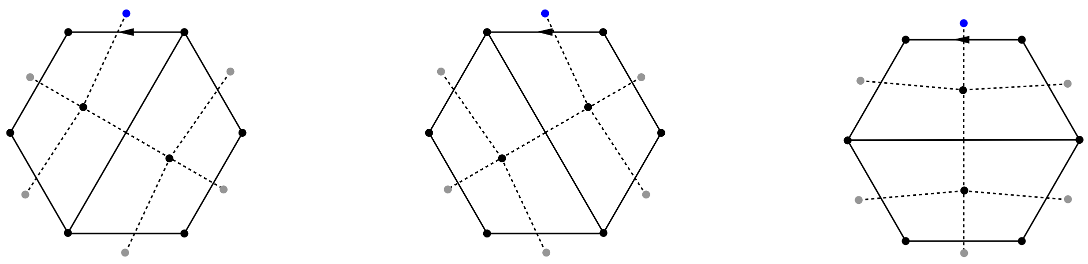
Рис. 1

8.5. Кактусом называют связный граф, в котором не существует ребер, лежащих более чем на одном простом цикле. Треугольным кактусом называют кактус, в котором каждое ребро принадлежит какому-то циклу C_3. На рис. 1 показаны треугольные кактусы, построенные на небольшом количестве вершин. Найдите количество треугольных кактусов на n помеченных вершинах.

8.6. Найдите количество n-перестановок, в которых k заданных элементов лежат в одном и том же цикле.

8.7. Докажите, что в среднем перестановки имеют H_n циклов, где H_n — n-я частичная сумма гармонического ряда:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$



(a) (b) (c)

Рис. 2

8.8. Из комбинаторных соображений запишите производящую функцию $f(z)$, описывающую количество плоских корневых посаженных деревьев, состоящих из n внутренних вершин степени $k+1$, а также $n(k-1)+2$ листьев, один из которых выбран в качестве корневой вершины. С помощью формулы обращения Лагранжа получите явное выражение для чисел $a_n^{(k)}$, описывающих количество таких деревьев.

Замечание 8.1. В качестве примера на рис.2 показаны все различные плоские корневые посаженные деревья с $n = 2$ внутренними вершинами степени $k + 1 = 4$ (пунктирные линии на рисунке; синим цветом помечены корни этих деревьев, серым — листья, черным — внутренние вершины) — так называемые плоские корневые $(k + 1)$-арные посаженные деревья. Эти же деревья можно рассматривать как плоские корневые упорядоченные деревья, в которых любая внутренняя вершина имеет исходящую степень, равную k. Удаляя все листья в таком дереве, мы получаем плоское корневое слабо k-арное дерево, в котором любая вершина имеет не более k линейно упорядоченных потомков. Наконец, любому плоскому корневому посаженному $(k+1)$-арному дереву можно однозначно сопоставить некоторое разбиение правильного $(n(k-1)+2)$-угольника на $(k+1)$-угольники. На рис. 2 для каждого из трех различных плоских корневых 4-арных посаженных деревьев построено изоморфное ему разбиение правильного шестиугольника с помеченной стороной на четырехугольники. Остальные примеры можно найти, например, в книге Стенли.

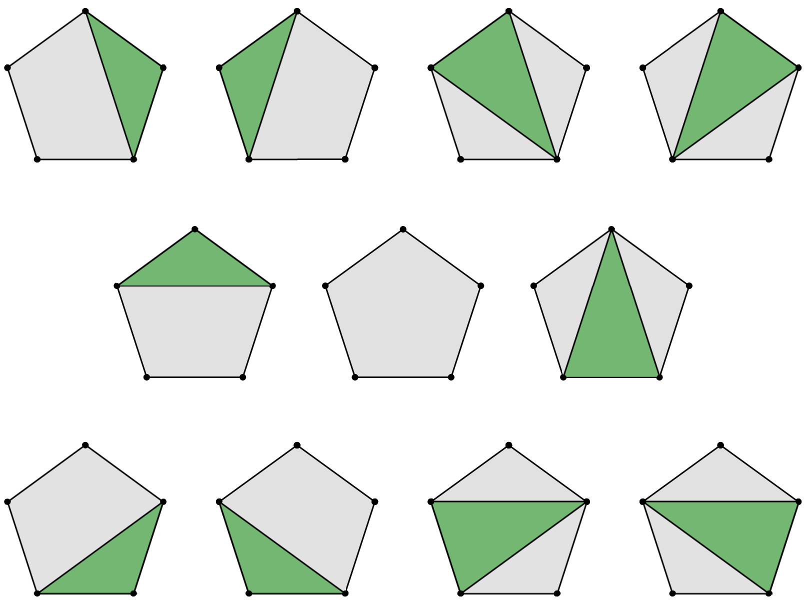


Рис. 3

8.9. Ранее мы ввели так называемые числа Шредера r_n. Наряду с этими числами часто вводят и числа $s_0 = 1$, $s_n = r_n/2$, $n > 0$, называемые еще малыми числами Шредера или числами Шредера – Гиппарха. Эти числа перечисляют количество всех возможных разбиений правильного $(n+1)$-угольника на многоугольники меньшего размера (см.рис.3, на котором изображено 11 разбиений правильного пятиугольника), количество плоских корневых посаженных деревьев с n некорневыми листьями, в которых количество линейно упорядоченных потомков у любой внутренней вершины больше или равна двум, и так далее. Постройте производящую функцию для чисел s_n. Можно ли найти явное аналитическое выражение для этих чисел с помощью формулы обращения Лагранжа?

8.10. Рассмотрим множество всех отображений f из множества $X = \{2, 3, \dots, n-1\}$ в множество $Y = \{1, 2, \dots, n\}$. Количество a_n всех таких отображений равно n^{n-2}. Докажите теорему Кэли $t_n = n^{n-2}$, установив биекцию между множеством всех отображений $f\colon X \to Y$ и количеством всех деревьев на n вершинах.

Указание. Рассмотрите орграф D на n вершинах, ребрами которого являются пары $(i, f(i))$.