Типы в языках программирования
Практика 7. Полиморфные типы: система $\lambda 2$ (System F)

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

07.04.2021

План

1. Система $\lambda 2$: формализм
2. Практика

План

$\lambda 2$: правила образование типов

Типы системы $\lambda 2$ образуются по следующим правилам:

(начальное)	$\dfrac{\alpha^* \in \Gamma}{\Gamma \Vdash \alpha : *}$
(образование $\rightarrow$)	$\dfrac{\Gamma \Vdash \sigma : * \quad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \Vdash \sigma \rightarrow \tau : *}$
(образование $\forall$)	$\dfrac{\Gamma, \alpha^* \Vdash \sigma : *}{\Gamma \Vdash \forall \alpha.\, \sigma : *}$

Контекст Γ здесь — упорядоченное множество объявлений, как типовых $(\alpha : *)$, так и термовых $(x : \tau)$.

Контекст называют допустимым (valid), обозначение $\Gamma \vdash$, если он построен по следующим правилам:

(начальное)	$\langle\,\rangle \vdash$	
(расширение типом)	$\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \alpha^* \vdash}$	$\alpha \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$
(расширение термом)	$\dfrac{\Gamma \Vdash \sigma : *}{\Gamma, x^\sigma \vdash}$	$x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$

Формальности λ2 а ля Чёрч: предтермы и редукция

- Предтермы:

$$\Upsilon_{\mathbb{T}} = V \mid \Upsilon_{\mathbb{T}}\Upsilon_{\mathbb{T}} \mid \Upsilon_{\mathbb{T}}\mathbb{T} \mid \lambda V^{\mathbb{T}}.\,\Upsilon_{\mathbb{T}} \mid \Lambda \mathbb{V}.\,\Upsilon_{\mathbb{T}}$$

- Редукция:

$$\begin{aligned}(\lambda x^{\sigma}.\,M)\,N &\to_{\beta} [x := N]\,M\\(\Lambda\alpha.\,M)\,\sigma &\to_{\beta} [\alpha := \sigma]\,M\end{aligned}$$

Формальности $\lambda 2$ а ля Чёрч: правила типизации

(начальное)	$\dfrac{x : \sigma \in \Gamma \quad \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x : \sigma}$
(удаление $\rightarrow$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$
(введение $\rightarrow$)	$\dfrac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau \quad \Gamma \Vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash \lambda x^{\color{red}\sigma}.\, M : \sigma \rightarrow \tau}$
(удаление $\forall$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \quad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M\,{\color{red}\tau} : [\alpha := \tau]\sigma}$
(введение $\forall$)	$\dfrac{\Gamma, \alpha^{*} \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash {\color{red}\Lambda \alpha.}\, M : \forall \alpha.\, \sigma}$

Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.

План

1. Система $\lambda 2$: формализм

2. Практика

- Для $\lambda 2$ в стиле Чёрча найдите замкнутую версию комбинаторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{B}$ и запишите их тип. Сколько разных версий можно написать?
- Определите тип терма

$$\lambda x^{\perp}.\, x\,(\perp\to\perp\to\perp)\,(x\,(\perp\to\perp)\,x)\,(x\,(\perp\to\perp\to\perp)\,x\,x)$$

- Докажите, атрибутировав по Черчу, что любому терму в нормальной форме может быть приписан тип в соответствии со следующей схемой

$$x_{n+1}^{\perp}, \ldots, x_m^{\perp} \vdash \lambda x_1 \ldots x_n.\, x_i\, M_1 \ldots M_k : \underbrace{\perp \to \ldots \to \perp}_{n} \to \perp$$

Здесь $n \geqslant 0$, $m > 0$, $m \geqslant n$, $k \geqslant 0$ и $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Контексты для λ2 в стиле Чёрча

- Придумайте контекст Γ, в котором верны утверждения типизации

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma & \vdash & x : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,\beta : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,\beta : (\beta \to \beta) \to \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,((\beta \to \beta) \to \beta)\,(x\,(\beta \to \beta)) : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta \to \beta)\,(x\,\beta) : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta \to \beta)\,(x\,\beta) : \beta \to \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta \to \beta \to \beta)\,(x\,\beta)\,(x\,\beta) : \beta \to \beta \to \beta
\end{array}
$$

λ2 в стиле Чёрча: булевы значения

- Каков тип булевых значений ($\mathtt{Bool}$)

$$
\begin{aligned}
\mathtt{tru} &\equiv \Lambda\alpha.\,\lambda\,t^{\alpha}\,f^{\alpha}.\,t \\
\mathtt{fls} &\equiv \Lambda\alpha.\,\lambda\,t^{\alpha}\,f^{\alpha}.\,f
\end{aligned}
$$

- Для комбинаторов $\mathtt{if}$, $\mathtt{not}$, $\mathtt{and}$ укажите их типы:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{if} &\equiv \lambda\,b\,x\,y.\,b\,x\,y \\
\\
\mathtt{not} &\equiv \lambda\,b.\,b\;\mathtt{fls}\;\mathtt{tru} \\
\mathtt{not}' &\equiv \lambda\,b\,t\,f.\,b\,f\,t \\
\\
\mathtt{and} &\equiv \lambda\,x\,y.\,x\,y\;\mathtt{fls} \\
\mathtt{and}' &\equiv \lambda\,x\,y\,t\,f.\,x\,(y\,t\,f)\,f
\end{aligned}
$$

- Тип чисел Черча $\mathtt{Nat} = \forall\alpha.\,(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$:

$$\begin{array}{lcl} 0 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, z \\ 1 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\, z \\ 2 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\, z) \\ 3 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\,(s\, z)) \\ 4 & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\,(s\,(s\, z))) \\ & \dots & \end{array}$$

- Заполните пропуски типами и укажите тип комбинатора

$$\mathtt{iszro} \equiv \lambda\, n^{\mathtt{Nat}}.\, n\,[\bullet]\,(\lambda\, x^{[\bullet]}.\, \mathtt{fls})\ \mathtt{tru}$$

- Определим комбинатор следования так

$$\mathtt{succ} \equiv \lambda n^{\mathtt{Nat}}.\,\Lambda\beta.\,\lambda s^{\beta\to\beta}.\,\lambda z^{\beta}.\, s\,(n\,\beta\, s\, z)$$

Проверьте, что (1) его тип $\mathtt{Nat} \to \mathtt{Nat}$; (2) $\mathtt{succ}\ 0 =_\beta 1$ и $\mathtt{succ}\ 1 =_\beta 2$.

- Определим комбинатор сложения так

$$\texttt{plus} \equiv \lambda m^{\texttt{Nat}} n^{\texttt{Nat}}.\,\Lambda\beta.\,\lambda s^{\beta\to\beta}.\,\lambda z^{\beta}.\,m\,\beta\,s\,(n\,\beta\,s\,z)$$

  Проверьте, что (1) его тип $\texttt{Nat}\to\texttt{Nat}\to\texttt{Nat}$; (2) $\texttt{plus}\ 1\ 1 =_\beta 2$.
- Бестиповой комбинатор умножения определялся одним из следующих способов

$$\begin{array}{lcl} \texttt{mult1} & \equiv & \lambda m\,n.\,m\,(\texttt{plus}\ n)\ 0 \\ \texttt{mult2} & \equiv & \lambda m\,n\,s\,z.\,m\,(n\,s)\,z \\ \texttt{mult3} & \equiv & \lambda m\,n\,s.\,m\,(n\,s) \end{array}$$

  Типизируйте эти определения в λ2 в стиле Черча.
- Заполните пропуски типами и укажите тип комбинатора

$$\texttt{pow} \equiv \lambda m^{\texttt{Nat}}\,n^{\texttt{Nat}}.\,\Lambda\beta.\,n\,[\bullet]\,(m\,[\bullet])$$

  Почему этот комбинатор не имел типа в системе $\lambda_\to$?

- Каков тип пар ($\mathtt{Pair}\,\sigma\,\tau$)

$$\mathtt{pair} \equiv \lambda x^{\sigma}.\,\lambda y^{\tau}.\,\Lambda\alpha.\,\lambda f^{\sigma\to\tau\to\alpha}.\,f\,x\,y$$

- Реализуйте комбинаторы `fst`, `snd` и укажите их тип.
- Каков тип суммы типов ($\mathtt{Either}\,\sigma\,\tau$)? Реализуйте термы описывающие его введение и удаление.
- Каков тип списка ($\mathtt{List}\,\sigma$)? Реализуйте термы описывающие его введение и удаление.

$\lambda 2$ в стиле Чёрча: примитивная рекурсия

- Напомним реализацию функция предшествования для чисел Черча:

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{zp} & \equiv & \mathtt{pair}\ 0\ 0 \\ \mathtt{sp} & \equiv & \lambda p.\,\mathtt{pair}\ (\mathtt{snd}\ p)\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{snd}\ p)) \\ \mathtt{pred} & \equiv & \lambda m.\,\mathtt{fst}\ (m\ \mathtt{sp}\ \mathtt{zp}) \end{array}$$

  Типизируйте комбинаторы $\mathtt{zp}$, $\mathtt{sp}$ и $\mathtt{pred}$.

- Обобщение предыдущей схемы дает комбинатор примитивной рекурсии

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{xz} & \equiv & \lambda x.\,\mathtt{pair}\ x\ 0 \\ \mathtt{fs} & \equiv & \lambda f\, p.\,\mathtt{pair}\ (f\ (\mathtt{fst}\ p)\ (\mathtt{snd}\ p))\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{snd}\ p)) \\ \mathtt{rec} & \equiv & \lambda m\, f\, x.\,\mathtt{fst}\ (m\ (\mathtt{fs}\ f)\ (\mathtt{xz}\ x)) \end{array}$$

  Типизируйте комбинаторы $\mathtt{xz}$, $\mathtt{fs}$ и $\mathtt{rec}$.

Кодирование «квантора существования» (Σ-типа)

- Пусть имеется произвольный тип σ, такой что $\alpha \in FV(\sigma)$. Введем типовую конструкцию

$$\exists \alpha.\, \sigma \;\equiv\; \forall \beta.\, (\forall \alpha.\, \sigma \to \beta) \to \beta$$

- Терм, который населяет обозначим

$$\langle \gamma, y \rangle \;\equiv\; \Lambda \beta.\, \lambda x^{\forall \alpha.\, \sigma \to \beta}.\, x\, \gamma\, y$$

- Какой тип имеет y в этом выражении?
- (*) Попробуйте найти правило удаления для $\exists \alpha.\, \sigma$.