2 Упражнения на нижние оценки и реберные раскраски

2.1. Пусть $G_2 = K_2$, а графы G_k, $k > 2$, получаются из графов G_{k-1} с помощью описанной в теореме Мицельского процедуры. Подсчитайте количество вершин в графе G_k.

2.2. Докажите, что среди всех k-дольных графов, построенных на

$$n = t \cdot k + r, \qquad 0 \leqslant r \leqslant k - 1,$$

вершинах, максимальное количество ребер имеет полный k-дольный граф G, в котором r блоков имеют $t + 1$ вершин, а в $n - r$ блоках содержатся t вершин.

2.3. Доказать, что граф G', полученный из k-критического графа G с использованием конструкции Мицельского, является $(k+1)$-критическим. Заметим, что для доказательства того, что связный граф G является k-критическим, достаточно сравнить его с подграфами, полученными из G удалением единственного ребра.

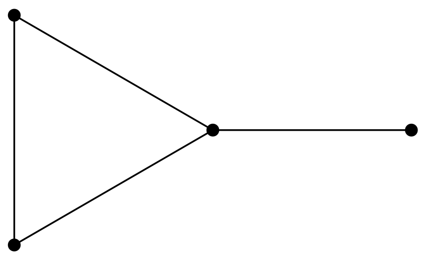


Рис. 1

2.4. Доказать, что количество ребер в простом графе G, не содержащем изображенного на рис.1 подграфа H, ограничено сверху величиной $\lfloor n^2/4 \rfloor$ в случае, если количество n вершин больше трех.

2.5. Доказать, что простой граф G представляет собой полный k-дольный граф тогда и только тогда, когда не существует никакого индуцированного подграфа графа G, состоящего из трех вершин и одного ребра.

2.6. Обозначим через X, $|X| = n$, множество точек на плоскости, расстояние между любой парой которых не превосходит 1. Доказать, что имеется не более чем $n^2/3$ пар точек, расстояние между которыми больше чем $1/\sqrt{2}$.

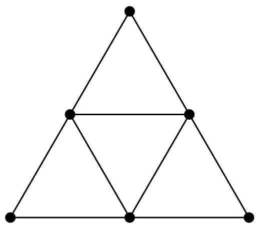
2.7. Определите реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для полного двудольного графа $K_{m,n}$.

2.8. Подсчитайте количество ребер в реберном графе $L(G)$ графа G.

2.9. Подсчитайте реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для графов, изображенных на рис. 2.

2.10. Подсчитайте реберное хроматическое число $\chi'(Q_n)$ для гиперкуба Q_n, предъявив способ оптимальной окраски его ребер.

2.11. Подсчитайте реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для 3-регулярного графа G, показанного на рис. 3.



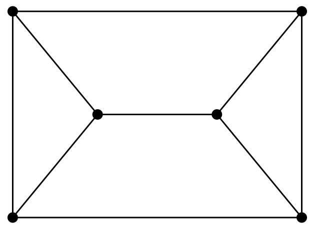


Рис. 2

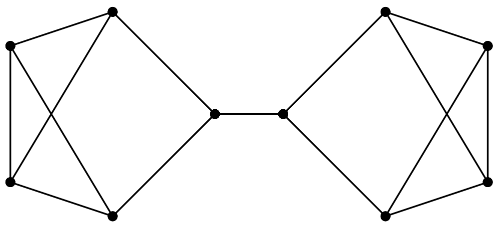


Рис. 3

2.12. Докажите, что реберное хроматическое число графа Петерсена равно четырем. Заметим, что граф Петерсена является двусвязным 3-регулярным графом. Любой такой граф с $\chi'(G) = 4$ называется *снарком* (snark). Такие графы обладают довольно интересными свойствами, связанными как с раскраской графов, так и с другими характеристиками графов.

2.13. Докажите, что реберное хроматическое число $\chi'(G)$ регулярного графа G, имеющего точку сочленения, строго больше $\Delta(G)$.

2.14. Доказать, что обхват графа G, построенного на n вершинах и имеющего как минимум $\frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$ ребер, не превосходит четырех.

2.15. Докажите, что реберное хроматическое число $\chi'(K_{2n})$ полного графа K_{2n} равно $2n-1$, предъявив конструктивный способ окраски ребер в $2n-1$ цвет для любого $n > 1$.