Математическая логика и теория вычислимости
Лекция 6. Логика предикатов первого порядка

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

17.03.2021

План лекции

1. Язык логики предикатов: формулы
2. Интерпретации, оценки, значения
3. Выразимые предикаты
4. Пример: язык элементарной арифметики

План лекции

1. Язык логики предикатов: формулы
2. Интерпретации, оценки, значения
3. Выразимые предикаты
4. Пример: язык элементарной арифметики

Предварительные замечания

- Логика высказываний достаточно бедна, высказывания в ней представляют собой элементарные неделимые объекты без внутренней структуры.
- Хотелось бы уметь формализовывать утверждения вроде

  Для любого x существует такой y, что их произведение даёт единичный элемент I.

- Мы приблизительно представляем, как это делать:

$$\forall x \exists y (x \times y = I)$$

- Нужно, однако, точно описать формализм и задать подходящую семантику.

Понятия отношения и предиката

- n-арным *отношением* R, заданным на множестве M, называют некоторое подмножество декартова произведения $M \times M \times \ldots \times M = M^n$.
- Пример: бинарное отношение равенства $=$ в $\mathbb{N}$. Ему принадлежат все пары вида $\langle x, x \rangle$ и только они.
- Для конкретных бинарных отношений принято использовать инфиксную запись. Пишут $3 = 3$, а не $\langle 3, 3 \rangle \in =$.
- n-арным *предикатом* P, заданным на множестве M, называют функцию $P : M^n \to \mathbb{B}$, где $\mathbb{B} = \{F, T\}$.
- Каждый предикат естественным образом порождает отношение, определяемое как прообраз T.
- Наоборот, каждому отношению можно сопоставить предикат, выступающий в роли характеристической функции этого отношения.

Функциональные символы

- Начнем формализацию. Что нам потребуется?
- Набор *индивидных (предметных) переменных*: $x, y, z, \ldots$
- Набор *функциональных символов* с заданной арностью: $f^n, g^m, h^k, \ldots$.
  - *Арность (валентность)* — это натуральное число, указывающее количество аргументов, которые требуются при использовании функционального символа.
  - В нашем примере использовался (инфиксный) функциональный символ $\times$ арности 2.
  - Арность $\times^2$ указывают только при первоначальном описании формализма.
  - Функциональные символы арности 0 называют *константами* (в нашем примере это I).
- Предполагается, что индивидные переменные и функциональные символы беруться из разных, непересекающихся наборов.

Термы

- Понятие *терма* (для заданных индивидных переменных и функциональных символов) определяется индуктивно:
  - индивидная переменная есть терм;
  - константа есть терм;
  - если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, а f — функциональный символ арности $n > 0$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ есть терм.
- Пример терма:

$$x \times (y \times I)$$

Предикатные символы, сигнатура

- Набор *предикатных символов* с заданной арностью: $P^n, Q^m, R^k, \ldots$.
  - В нашем примере использовался (инфиксный) предикатный символ $=$ арности 2.
  - Арность $=^2$ указывают только при первоначальном описании формализма.
  - Предикатных символов арности 0 (достаточно двух: "истинный" – $\top$ и "ложный" $\perp$).
- Набор функциональных и предикатных символов с заданной арностью называется *сигнатурой*.
  - Пример сигнатуры:
  $$\times^2, I^0, =^2$$
- Предикатный символ $=^2$ часто входит в сигнатуру и называется *равенством*.
- Часто имеется договоренность о приоритете инфиксных символов сигнатуры (реже — об ассоциативности).

Атомарные формулы

- *Атомарная формула* для заданной сигнатуры это:
  - $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где P — предикатный символ арности $n > 0$, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы;
  - предикатный символ арности 0.
- Пример атомарной формулы:

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

- Атомарные формулы используют в логике предикатов аналогично пропозициональным переменным в логике высказываний.

Формулы первого порядка

- Понятие *формулы* для заданной сигнатуры определяется индуктивно:
  - атомарная формула есть формула;
  - если φ — формула, то $\neg\varphi$ — формула;
  - если φ и ψ — формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ — формулы;
  - если φ — формула, а x — индивидная переменная, то $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ — формулы.
- Пример формулы первого порядка:

$$\forall x \exists y ((x \times y = I) \wedge (y \times x = I))$$

- Кванторы имеют высший приоритет, такой же как $\neg$. (Бывают другие договоренности.)

$$\forall x \neg P(x) \wedge Q(x) \to \neg R(x)$$

Здесь P, Q, R — предикатные символы.

- Множество *свободных переменных (параметров)* $\mathrm{FV}(A)$ формулы A определяется индуктивно:
  - все переменные, входящие в термы, — свободные;
  - свободные переменные атомарной формулы — это свободные переменные входящих в нее термов;
  - $\mathrm{FV}(\neg\varphi) = \mathrm{FV}(\varphi)$;
  - $\mathrm{FV}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi)$;
  - $\mathrm{FV}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi)$;
  - $\mathrm{FV}(\varphi \to \psi) = \mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi)$;
  - $\mathrm{FV}(\forall x \varphi) = \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}$;
  - $\mathrm{FV}(\exists x \varphi) = \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}$.
- Переменные, не являющиеся свободными, называют *связанными*. Их множество обозначают $\mathrm{BV}(A)$.

Свободные и связанные переменные

- Одна и та же переменная может иметь и связанные и свободные вхождения, а также оказаться связанной несколько раз:

$$\forall x \neg P(x) \wedge Q(x) \to \neg R(x)$$

$$\neg \forall x P(x) \to \exists x \neg P(x)$$

$$\forall x (\exists x P(x) \to Q(x, x))$$

- Формула, в которой нет свободных вхождений переменных, называется *замкнутой формулой (суждением)*.

Пример: теория групп

- Сигнатура теории групп:
  - функциональные символы $\times^2, \mathrm{I}^0, \mathrm{inv}^1$;
  - предикатный символ $=^2$.
- Аксиомы:

$$\begin{array}{l}\forall x \forall y \forall z((x \times y) \times z = x \times (y \times z)) \\ \forall x((x \times \mathrm{I} = x) \wedge (\mathrm{I} \times x = x)) \\ \forall x((x \times \mathrm{inv}(x) = \mathrm{I}) \wedge (\mathrm{inv}(x) \times x = \mathrm{I}))\end{array}$$

- Сигнатура теории групп (версия 2):
  - функциональные символы $\times^2, \mathrm{I}^0$;
  - предикатный символ $=^2$.
- Аксиомы:

$$\begin{array}{l}\forall x \forall y \forall z((x \times y) \times z = x \times (y \times z)) \\ \forall x((x \times \mathrm{I} = x) \wedge (\mathrm{I} \times x = x)) \\ \forall x \exists y((x \times y = \mathrm{I}) \wedge (y \times x = \mathrm{I}))\end{array}$$

План лекции

Интерпретация

- Пусть задана сигнатура. Задать ее *интерпретацию* значит
  - указать непустое множество D, называемое *носителем* интерпретации;
  - для каждого функционального символа f^n сигнатуры задать функцию подходящей арности $[\mathrm{f}] : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$;
  - для каждого предикатного символа P^n сигнатуры задать предикат подходящей арности $[\mathrm{P}] : \mathrm{D}^n \to \mathbb{B}$.
- Если в сигнатуру входит знак равенства, то интерпретация, в которой ему ставится в соответствие совпадение элементов D, называется *нормальной*.
- **Пример.** Интерпретация сигнатуры теории групп:
  - носитель $\mathbb{Z}$;
  - $[\times] = + : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$;
  - $[\mathrm{I}] = 0 : \mathbb{Z}$;
  - $[\mathrm{inv}] = - : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$;
  - $[=] = \ = : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{B}$.

  Получили группу целых чисел с операцией сложения.

Оценка

- Пусть задана сигнатура и ее интерпретация.
- Задать ее *оценку* значит задать отображение v, ставящее в соответствие каждой индивидной переменной некоторый элемент носителя интерпретации.
- Такой элемент называют *значением переменной* при данной оценке.
- Например, для нашей интерпретации сигнатуры теории групп как группы целых со сложением можно задать оценку

$$v(x) = -3$$
$$v(y) = 8$$
$$v(z) = 31$$

Значение терма

- Пусть задана интерпретация сигнатуры и оценка ν.
- *Значение терма* τ (нотация $[\tau]_\nu$) является элементом носителя и определяется индуктивно:
  - значение индивидной переменной напрямую определяется оценкой $[x]_\nu = \nu(x)$;
  - значение константы не зависит от оценки и определяется интерпретацией;
  - если терм τ имеет вид $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то
    $$[\tau]_\nu = [f]\left([t_1]_\nu, [t_2]_\nu, \ldots, [t_n]_\nu\right)$$
- Пример. Для оценки ν с предыдущего слайда:

$$[\mathrm{inv}(x) \times (y \times I)]_\nu = -(-3) + (8 + 31) = 42$$

Значение формулы

- Пусть задана интерпретация сигнатуры и оценка ν.
- *Значение формулы* φ (нотация $[\varphi]_\nu$) является элементом $\mathbb{B} = \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ и определяется индуктивно:
  - если φ — атомарная формула $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, то ее значение
  $$[\varphi]_\nu = [P]\left([t_1]_\nu, [t_2]_\nu, \ldots, [t_n]_\nu\right)$$
  - $[\top]_\nu = \mathrm{T}$, $[\bot]_\nu = \mathrm{F}$ независимо от интерпретации и оценки;
  - $[\neg\varphi]_\nu = \neg\ [\varphi]_\nu$;
  - $[\varphi \wedge \psi]_\nu = [\varphi]_\nu \wedge [\psi]_\nu$;
  - $[\varphi \vee \psi]_\nu = [\varphi]_\nu \vee [\psi]_\nu$;
  - $[\varphi \to \psi]_\nu = [\varphi]_\nu \to [\psi]_\nu$;
  - (про кванторы чуть позже)
- Пример. Для оценки ν с пред-предыдущего слайда:

$$\begin{aligned} & [x \times (y \times z) = (x \times y) \times z)]_\nu = \\ = \quad & ((-3) + (8 + 31) = (-3 + 8) + 31) = (36 = 36) = \mathrm{T} \end{aligned}$$

Значение формулы с квантором существования $\exists$

- Пусть d — элемент носителя интерпретации D, а ν — некоторая оценка.
- Обозначим через $\nu, x := d$ оценку, которая совпадает с ν для всех переменных, кроме x, которая при этой оценке имеет значение d.
- Значение формулы с квантором $\exists$ определяется как дизъюнкция по всем значениям носителя

$$[\exists x \varphi]_\nu = \bigvee_{d \in D} [\varphi]_{\nu, x := d}$$

- Пример.

$$[\exists x (x \times x = y)]_\nu = (0 + 0 = 8) \vee (1 + 1 = 8) \vee$$
$$\vee (-1 + (-1) = 8) \vee (2 + 2 = 8) \vee (-2 + (-2) = 8) \vee \ldots = ?$$

- Значение формулы с квантором $\forall$ определяется как конъюнкция по всем значениям носителя

$$[\forall x \varphi]_v = \bigwedge_{d \in D} [\varphi]_{v, x := d}$$

- Пример.

$$[\forall x (x \times I = x)]_v = (0 + 0 = 0) \wedge (1 + 0 = 1) \wedge$$
$$\wedge (-1 + 0 = -1) \wedge (2 + 0 = 2) \wedge (-2 + 0 = -2) \wedge \ldots = T$$

- Значение формулы определяется значениями ее свободных переменных.
- Значение замкнутой формулы не зависит от оценки и полностью определяется выбором интерпретации.

План лекции

1. Язык логики предикатов: формулы
2. Интерпретации, оценки, значения
3. Выразимые предикаты
4. Пример: язык элементарной арифметики

Понятие выразимости

- Пусть дана сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D.
- Пусть дана формула φ, такая что $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$.
- Ее истинность зависит только от значений свободных переменных $x_1, \dots, x_k$ (параметров). Таким образом формула *выражает* некоторый k-арный предикат на D.
- Все предикаты, которые могут быть получены таким способом, называются *выразимыми* в данной сигнатуре. Подмножества D^k, соответствующие этим предикатам, называют *выразимыми множествами*.
- Объединение, пересечение и проекция выразимых множеств являются выразимыми.

Пример выразимых предикатов

- Сигнатура:
  - функциональный символ S^1;
  - предикатный символ $=^2$.
- Интерпретация (нормальная):
  - носитель: $\mathbb{N}$;
  - функциональный символ: $[S] = \lambda x.\, x + 1$.
- Предикат «быть больше трех»:

Пример выразимых предикатов

- Сигнатура:
  - функциональный символ S^1;
  - предикатный символ $=^2$.
- Интерпретация (нормальная):
  - носитель: $\mathbb{N}$;
  - функциональный символ: $[S] = \lambda x.\, x + 1$.
- Предикат «быть больше трех»:

$$\exists y (x = S(S(S(y))))$$

- Предикат «быть нулем»:

Пример выразимых предикатов

- Сигнатура:
  - функциональный символ S^1;
  - предикатный символ $=^2$.
- Интерпретация (нормальная):
  - носитель: $\mathbb{N}$;
  - функциональный символ: $[S] = \lambda x.\, x + 1$.
- Предикат «быть больше трех»:

$$\exists y(x = S(S(S(y))))$$

- Предикат «быть нулем»:

$$\neg\exists y(x = S(y))$$

План лекции

1. Язык логики предикатов: формулы
2. Интерпретации, оценки, значения
3. Выразимые предикаты
4. Пример: язык элементарной арифметики

Язык элементарной арифметики

- Сигнатура языка элементарной арифметики:
  - функциональные символы $0^0, S^1, +^2, \cdot^2$;
  - предикатный символ $=^2$.
- Приоритет S выше $\cdot$, приоритет $\cdot$ выше $+$.
- Примеры термов:

$$S(S(S(0)))$$

$$x + S(0) \cdot y$$

- Примеры формул:

$$x + y = x + S(0) \cdot y$$

$$\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))$$

Стандартная интерпретация языка арифметики

- Стандартная интерпретация:
  - носитель $\mathbb{N}$;
  - функциональные символы:

$$
\begin{aligned}
[0] &= 0 \\
[+] &= + \\
[S] &= \lambda x.\, x+1 \\
[\cdot] &= \cdot
\end{aligned}
$$

  - предикатный символ $=$ имеет нормальную интерпретацию.
- Интерпретация формул на оценке $v(x) = 2, v(y) = 3$:

$$[x + y = x + S(0) \cdot y]_v \;{\color{red}=}\; (2 + 3 = 2 + (0 + 1) \cdot 3) \;{\color{red}=}\; \mathrm{T}$$

$$[\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))] = {\color{red}?}$$

Стандартная интерпретация языка арифметики

- Стандартная интерпретация:
  - носитель $\mathbb{N}$;
  - функциональные символы:

$$\begin{aligned}[0] &= 0\\ [+] &= +\\ [S] &= \lambda x.\, x+1\\ [\cdot] &= \cdot\end{aligned}$$

  - предикатный символ $=$ имеет нормальную интерпретацию.
- Интерпретация формул на оценке $\nu(x) = 2, \nu(y) = 3$:

$$[x + y = x + S(0) \cdot y]_\nu = (2 + 3 = 2 + (0 + 1) \cdot 3) = \mathrm{T}$$

$$[\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))] = ?$$

- Что будет если поменять носитель на $\mathbb{Z}$?

Выразительная сила языка элементарной арифметики

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$)?

Выразительная сила языка элементарной арифметики

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$)? Да:

$$x \leqslant y \equiv \exists z(y = x + z)$$

Выразительная сила языка элементарной арифметики

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$)? Да:

$$x \leqslant y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Отношение $y \mid x$ (y делит x нацело)?

Выразительная сила языка элементарной арифметики

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$)? Да:

$$x \leqslant y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Отношение $y \mid x$ (y делит x нацело)? Да:

$$y \mid x \equiv \exists z(x = y \cdot z)$$

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$)? Да:

$$x \leqslant y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Отношение $y \mid x$ (y делит x нацело)? Да:

$$y \mid x \equiv \exists z(x = y \cdot z)$$

- Простота (унарное отношение prime)?

Выразительная сила языка элементарной арифметики

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$)? Да:

$$x \leqslant y \equiv \exists z (y = x + z)$$

- Отношение $y \mid x$ (y делит x нацело)? Да:

$$y \mid x \equiv \exists z (x = y \cdot z)$$

- Простота (унарное отношение prime)? Да:

$$\mathrm{prime}\, x \equiv \neg(x = 0 \vee x = S(0)) \wedge \forall y\, (y \mid x \to y = S(0) \vee y = x)$$