

# Математическая логика и теория вычислимости

## Лекции 8. Исчисление предикатов гильбертовского типа

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains  
Разработка ПО / Software Engineering

31.03.2021

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте

- Напомним правила построения формул логики предикатов
  - 1 Фиксируется сигнатура, как набор функциональных и предикатных символов заданной арности.
  - 2 Из индивидуальных переменных с помощью функциональных символов строятся термы.
  - 3 Из термов с помощью предикатных символов строятся атомарные формулы.
  - 4 Из атомарных формул с помощью стандартных пропозициональных связок и кванторов получают формулы логики предикатов.
- Можно ли аналогично исчислению высказываний построить исчисление предикатов?
- То есть: задать аксиомы и правила вывода и получить в результате выводимыми все общезначимые формулы и только их?

- Сохраняем схемы аксиом исчисления высказываний:

1  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$

2  $(\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \chi$

3  $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

4  $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$

5  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \wedge \psi$

6  $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$

7  $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$

8  $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \varphi \vee \psi \rightarrow \chi$

9  $\neg\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \psi$

10  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi$

11  $\varphi \vee \neg\varphi$

- Новые схемы аксиомы:

12  $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x := \tau)$

13  $\varphi(x := \tau) \rightarrow \exists x\varphi$

Требуется, чтобы подстановки были корректными.

- Какие частные случаи аксиом

12  $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x := \tau)$

13  $\varphi(x := \tau) \rightarrow \exists x\varphi$

можно выделить без оговорки о корректности подстановок?

- Всегда можно корректно подставлять константу данной сигнатуры (или, шире, любой терм без переменных).
- Всегда можно корректно подставлять вместо переменной  $x$  ее саму, то есть
  - $\forall x\varphi \rightarrow \varphi$
  - $\varphi \rightarrow \exists x\varphi$

являются аксиомами.

- Modus ponens по-прежнему работает

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad (\text{MP})$$

- Помимо этого имеются еще два *правила Бернайса*

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{\psi \rightarrow \forall x \varphi} \quad (\text{B}\forall)$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi} \quad (\text{B}\exists)$$

Требуется, чтобы переменная  $x$  не была свободна в  $\psi$ .

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi(x)}{\psi \rightarrow \forall x \varphi(x)} \quad (B\forall)$$

- Пусть посылка общезначима

$$\psi \rightarrow \varphi(x)$$

- Тогда универсальное замыкание тоже общезначимо

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi(x))$$

- А это эквивалентно

$$\psi \rightarrow \forall x \varphi(x)$$

(см. прошлую лекцию)



$$\frac{\varphi(x) \rightarrow \psi}{\exists x \varphi(x) \rightarrow \psi} \quad (\forall\exists)$$

- Пусть посылка общезначима

$$\varphi(x) \rightarrow \psi$$

- Тогда универсальное замыкание тоже общезначимо

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi)$$

- А это эквивалентно

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \psi$$

(см. прошлую лекцию)

- **Утверждение.** Допустимо производное *правило обобщения*:

$$\frac{\varphi}{\forall x\varphi} \quad (\text{Gen})$$

- **Доказательство.** Действительно, возьмём в качестве  $\psi$  заведомо выводимую формулу, например какую-либо аксиому с подставленными в нее замкнутыми формулами. Имеем:

1	$\psi$	Assumption
2	$\varphi$	Premise
3	$\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$	A1
4	$\psi \rightarrow \varphi$	MP(2)(3)
5	$\psi \rightarrow \forall x\varphi$	B $\forall$ (4)
6	$\forall x\varphi$	MP(1)(5) ■

- Исчисление высказываний является полным, поэтому мы можем считать выводимым (в ИП) любой частный случай пропозициональной тавтологии.
- Например, выводимы

$$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$$

$$(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \chi)$$

$$(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$$

- Выведем, например,  $\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$

$$1 \quad \forall x\varphi \rightarrow \varphi$$

A12

$$2 \quad \varphi \rightarrow \exists x\varphi$$

A13

$$3 \quad (\forall x\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \exists x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$$

[syllogism](#)

$$4 \quad (\varphi \rightarrow \exists x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$$

MP(1)(3)

$$5 \quad \forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$$

MP(2)(4)

- **Утверждение.** Класс выводимых формул не измениться, если использовать (Gen) вместо  $(B\forall)$  и  $(B\exists)$  в качестве правил вывода, и добавить две дополнительные аксиомы

$$\textcircled{14} \quad \forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$$

$$\textcircled{15} \quad \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$$

(Как обычно, требуется, чтобы  $x$  не была свободна в  $\psi$ .)

- **Доказательство.** Покажем, например, что  $(B\forall)$  допустимо, как производное правило:

1	$\psi \rightarrow \varphi$	Premise
2	$\forall x(\psi \rightarrow \varphi)$	Gen(1)
3	$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$	A14
4	$\psi \rightarrow \forall x\varphi$	MP(2)(3) ■

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления**
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте

- Мы хотим доказать, что всякая формула, выводимая в исчислении предикатов, является общезначимой.
- Для этого мы должны проверить все аксиомы на общезначимость и все правила вывода на сохранение общезначимости.
- Аксиомы (A1-11) тривиально общезначимы.
- Правило Modus ponens сохраняет общезначимость.
- Остаются две новые аксиомы и правила Бернайса.

- **Лемма 1.** Для произвольных термов  $u$  и  $t$  и произвольной оценки  $\nu$  верно

$$[u(x := t)]_{\nu} = [u]_{\nu, x := [t]_{\nu}}$$

- **Доказательство.** Индукция по структуре терма.

*База:*

$x$  – это переменная. Если  $x$ , то слева и справа  $[t]_{\nu}$ . Если не  $x$  (скажем  $y$ ), то слева и справа  $\nu(y)$ .

*Индукционный переход:*

тривиально.



# Лемма о подстановке в формулу

- **Лемма 2.** Для произвольных формулы  $\varphi$ , терма  $t$  и произвольной оценки  $\nu$  верно

$$[\varphi(x := t)]_{\nu} = [\varphi]_{\nu, x := [t]_{\nu}}$$

если подстановка  $t$  вместо  $x$  в  $\varphi$  корректна.

- **Доказательство.** Индукция по структуре формулы.

**База:**

$\varphi$  – атомарная формула. Следует из Леммы 1.

**Индукционный переход:**

Для пропозициональных связок тривиально.

Пусть  $\varphi$  имеет вид  $\forall y\psi$ , причем  $x$  свободен в  $\psi$  (иначе — тривиально). По условию подстановка  $t$  вместо  $x$  в  $\varphi$  корректна, то есть  $y$  не свободен в  $t$ , откуда подстановка  $t$  вместо  $x$  в  $\psi$  корректна. (см. след. слайд)



# Лемма о подстановке в формулу (продолжение)

$$\begin{aligned} & [(\forall y\psi)(x := t)]_v = [\forall y(\psi(x := t))]_v = \\ & = \bigwedge_d [\psi(x := t)]_{v, y:=d} = & \text{(IH)} \\ & = \bigwedge_d [\psi]_{v, y:=d, x:=[t]_{v, y:=d}} = & (y \notin FV(t)) \\ & = \bigwedge_d [\psi]_{v, y:=d, x:=[t]_v} = \\ & = \bigwedge_d [\psi]_{v, x:=[t]_v, y:=d} = \\ & = [\forall y(\psi)]_{v, x:=[t]_v} = \\ & = [\varphi]_{v, x:=[t]_v} \end{aligned}$$

Для  $\varphi$  вида  $\exists y\psi$  аналогично. ■

- Рассмотрим аксиому 12

$$\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x := \tau)$$

в произвольной интерпретации на произвольной оценке  $v$ .

- Пусть  $[\forall x\varphi]_v = T$ , тогда  $[\varphi]_{v'} = T$  для любой  $v'$ , отличной от  $v$  по  $x$ ; в частности для  $v'$  равной  $v$ ,  $x := [\tau]_v$ . Тогда по Лемме 2  $[\varphi(x := \tau)]_v = T$ .
- Таким образом аксиома 12 истинна в произвольной интерпретации на произвольной оценке, то есть общезначима.
- Общезначимость аксиомы 13

$$\varphi(x := \tau) \rightarrow \exists x\varphi$$

аналогично.

- Рассмотрим первое правило Бернайса

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{\psi \rightarrow \forall x \varphi} \quad x \notin FV(\psi)$$

- Пусть  $\psi \rightarrow \varphi$  общезначима. Покажем, что  $\psi \rightarrow \forall x \varphi$ .
- Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку  $v$ .
- Пусть  $[\psi]_v = T$ , тогда  $[\psi]_{v,x:=d} = T$  для любого  $d$  из носителя. Но тогда, поскольку  $\psi \rightarrow \varphi$  общезначима,  $[\varphi]_{v,x:=d} = T$ . Но это в точности означает, что  $[\forall x \varphi]_v = T$ .
- Таким образом первое правило Бернайса сохраняет общезначимость.

# Сохранение общезначимости во втором правиле Бернайса

- Рассмотрим второе правило Бернайса

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi} \quad x \notin FV(\psi)$$

- Пусть  $\varphi \rightarrow \psi$  общезначима. Покажем, что  $\exists x \varphi \rightarrow \psi$  общезначима.
- Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку  $\nu$ .
- Пусть  $[\exists x \varphi]_{\nu} = T$ , тогда  $[\varphi]_{\nu, x:=d} = T$  для некоторого  $d$  из носителя. Но тогда, поскольку  $\varphi \rightarrow \psi$  общезначима,  $[\psi]_{\nu, x:=d} = T$ . Но  $\psi$  не зависит от  $x$ , то есть  $[\psi]_{\nu} = T$ .
- Таким образом второе правило Бернайса сохраняет общезначимость.

Итак, мы доказали следующий факт:

- **Теорема (о корректности ИП).** Любая формула, выводимая в исчислении предикатов, является общезначимой.

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез**
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте

- В исчислении высказываний имело место лемма о дедукции:  $\Gamma \vdash A \rightarrow B$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma, A \vdash B$ .
- Однако правило (Gen) без дополнительных ограничений порождает проблемы в исчислении предикатов:

$$P(x) \vdash \forall x P(x) \quad \text{ok, Gen}$$

$$\vdash P(x) \rightarrow \forall x P(x) \quad ???$$

Последнее необщезначимо.

- Очевидно, что Gen не стоит применять для связывания свободной переменной формулы-гипотезы.
- Иногда этот запрет формализуют явно, но часто удобнее требовать замкнутости гипотез.

- Произвольное множество замкнутых формул  $\Gamma$  сигнатуры  $\sigma$  называют *теорией* в этой сигнатуре.
- Говорят, что формула  $\varphi$  *выводима из  $\Gamma$*  (является *теоремой* теории  $\Gamma$ ), если ее можно вывести, используя аксиомы и формулы из  $\Gamma$ ; нотация

$$\Gamma \vdash \varphi$$

- Интерпретация  $M$  сигнатуры  $\sigma$  называется *моделью* теории  $\Gamma$ , если все формулы из  $\Gamma$  истинны в  $M$ .



**Лемма о дедукции.** Пусть  $\Gamma$  — множество замкнутых формул и  $A$  — замкнутая формула. Тогда  $\Gamma \vdash A \rightarrow B$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma, A \vdash B$ .

**Доказательство.**

- Пусть  $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ . Тогда и  $\Gamma, A \vdash A \rightarrow B$ , откуда из  $\Gamma, A \vdash A$  по МР получаем искомый результат.
- Пусть  $\Gamma, A \vdash B$ . Рассмотрим вывод формулы  $B$  — последовательность формул

$$C_1, C_2, \dots, C_n$$

где  $C_n$  это  $B$ . Формула  $C_i$  может быть: (1)  $A$ , (2) из  $\Gamma$ , (3) аксиомой, (4) результатом применения МР к двум предыдущим, (5) результатом применения  $\forall\text{I}$  к предыдущей формуле, (6) результатом применения  $\exists\text{E}$  к предыдущей формуле.

# Лемма о дедукции (продолжение доказательства)

Припишем ко всем формулам вывода посылку  $A$  и покажем, что эту цепочку можно расширить до вывода.

(1-4). Идентично случаю исчисления высказываний.

(5). В новой цепочке имеется переход от  $A \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$  к  $A \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$ . Вставляем формулы

$$A \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$$

$$A \wedge \psi \rightarrow \varphi$$

$$A \wedge \psi \rightarrow \forall x\varphi$$

$$A \rightarrow \psi \rightarrow \forall x\varphi$$

(6). В новой цепочке имеется переход от  $A \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$  к  $A \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$ . Вставляем формулы

$$A \rightarrow \varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \rightarrow A \rightarrow \psi$$

$$\exists x\varphi \rightarrow A \rightarrow \psi$$

$$A \rightarrow \exists x\varphi \rightarrow \psi$$



- Если  $\Gamma \vdash A$  и  $\Gamma \subset \Delta$ , то  $\Delta \vdash A$ .
- Если  $\Gamma \vdash A$ , то существует конечное  $\Delta \subset \Gamma$ , такое что  $\Delta \vdash A$ .

- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash A$  тогда и только тогда, когда

$$\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow A$$

- **Теорема о корректности ИП (ver.2).** Все теоремы теории  $\Gamma$  истинны в любой модели  $M$  этой теории.
- **Доказательство.** Пусть  $A$  — теорема  $\Gamma$ , тогда найдутся  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in \Gamma$ , такие что

$$\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k \rightarrow A$$

Эта формула выводима, значит истинна во всех интерпретациях (в т.ч. в  $M$ ). Но в  $M$  истинны все  $\varphi_i$  (поскольку это модель), значит заключение импликации  $A$  тоже истинно. ■

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах**
- 5 Теорема Гёделя о полноте

- **Лемма (о свежих константах).** Пусть  $\varphi$  — формула ИП, а  $c$  — константа, не входящая в эту формулу. Тогда выводимость  $\varphi(x := c)$  влечет выводимость  $\varphi$ .
- **Доказательство.** Возьмем свежую для  $\varphi$  переменную  $y$ . Вывод  $\varphi(x := c)$  при замене  $c$  на  $y$  останется выводом (кванторов по ней нет).

1	$\varphi(x := y)$	Assumption
2	$\forall y \varphi(x := y)$	Gen
3	$\forall y \varphi(x := y) \rightarrow \varphi(x := y)(y := x)$	A12
4	$\varphi(x := y)(y := x)$	MP(2)(3)
5	$\varphi$	



- Лемма легко обобщается на случай нескольких констант.

- **Лемма (о добавлении констант)**. Пусть  $\varphi$  — формула ИП некоторой сигнатуры  $\sigma$ . Пусть она выводима в сигнатуре  $\sigma'$ , полученной из  $\sigma$  добавлением новых констант. Тогда  $\varphi$  выводима в ИП сигнатуры  $\sigma$ .
- **Доказательство**. Если в выводе формулы  $\varphi$  в  $\sigma'$  встречаются новые константы, заменяем их на свежие переменные. ■
- Лемма легко обобщается для произвольного расширения сигнатуры.
- Это означает, что можно говорить о выводимости формулы, не уточняя, в какой сигнатуре мы ищем вывод.

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте

- Фиксируем сигнатуру  $\sigma$  и рассмотрим теорию  $\Gamma$  в этой сигнатуре.
- Теория  $\Gamma$  называется *противоречивой*, если в ней выводима некоторая формула и ее отрицание. В противном случае теория называется *непротиворечивой*.
- В противоречивой теории выводима любая формула:

1	$\Gamma \vdash \varphi$	Assumption
2	$\Gamma \vdash \neg\varphi$	Assumption
3	$\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \psi$	A9
4	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$	MP(2)(3)
5	$\Gamma \vdash \psi$	MP(1)(4)

- Любое подмножество непротиворечивого множества непротиворечиво.
- У бесконечного противоречивого множества есть конечное противоречивое подмножество.



- Интерпретация  $M$  сигнатуры  $\sigma$  называется *моделью* теории  $\Gamma$ , если все формулы из  $\Gamma$  истинны в  $M$ .
- **Теорема о корректности ИП (ver.2)**. Все теоремы теории  $\Gamma$  истинны в любой модели  $M$  этой теории.
- Множество формул  $\Gamma$  называют *совместным*, если оно имеет модель.
- **Теорема о корректности ИП (ver.3)**. Любое совместное множество замкнутых формул непротиворечиво.  
**Доказательство.** (от противного) Пусть имеется замкнутая  $\varphi$ , такая что  $\Gamma \vdash \varphi$  и  $\Gamma \vdash \neg\varphi$ . Но из совместности следует наличие модели  $M$ , в которой  $\varphi$  и  $\neg\varphi$  должны быть истинны одновременно. ■

- Теория  $\Gamma$  в сигнатуре  $\sigma$  называется *полной* в этой сигнатуре если для любой **замкнутой** формулы  $\varphi$  **этой сигнатуры** либо  $\varphi$ , либо  $\neg\varphi$  является теоремой теории  $\Gamma$ :

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{or} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

- Фиксация сигнатуры важна: если символ  $S$  не входит в сигнатуру  $\sigma$ , но используется в формуле  $\psi$ , то  $\Gamma \not\vdash \psi$  и  $\Gamma \not\vdash \neg\psi$ , например

$$\Gamma \not\vdash \exists x S(x) \quad \Gamma \not\vdash \neg\exists x S(x)$$

- Замкнутость формулы  $\varphi$  тоже важна: множество истинных формул сигнатуры  $(0^0, S^1, =^2)$  полно, но ни  $x = y$ , ни  $\neg(x = y)$  из него не выводимо.

- Цель — доказать, что **любая непротиворечивая теория совместна**.
- Как это делалось в логике высказываний:
  - 1 расширили  $\Gamma$  до полного множества  $\Delta \supset \Gamma$ ;
  - 2 для всякой пропозициональной переменной  $p$  полагали

$$p = T, \quad \text{if } \Delta \vdash p,$$

$$p = F, \quad \text{if } \Delta \vdash \neg p;$$

- 3 показывали, что такое означивание приводит к истинности всех формул  $\Delta$  (а значит и  $\Gamma$ ).
- В логике предикатов будем действовать по той же схеме.
  - Однако, у нас будут проблемы с шагом 2: нам нужно будет как-то смонтировать носитель интерпретации.

- **Лемма (о пополнении).** Всякое непротиворечивое множество  $\Gamma$  сигнатуры  $\sigma$  содержится в непротиворечивом полном множестве  $\Delta$  той же сигнатуры.
- **Доказательство.** Пусть  $\varphi$  произвольная формула сигнатуры  $\sigma$ . Рассмотрим  $\Gamma, \varphi$  и  $\Gamma, \neg\varphi$ . Одно из них непротиворечиво. Действительно, если противоречивы оба, то

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \quad \Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}$$

То есть  $\Gamma \vdash \neg\varphi$  и  $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ , что противоречит непротиворечивости  $\Gamma$ . Будем теперь перебирать все допустимые формулы, добавляя к  $\Gamma$  либо формулу, либо отрицание, сохраняя непротиворечивость. ■

- Для работы с семантическим понятием совместности нам нужно задать некоторую интерпретацию. Возьмем в качестве носителя  $D$  множество всех *замкнутых* термов нашей сигнатуры  $\sigma$  (термов без переменных).
- Функциональные символы при этом интерпретируются “естественным образом”: функциональному символу  $f$  арности  $n$  ставится в соответствие такая функция  $[f]$

$$[f]([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$$

Здесь  $t_1, \dots, t_n$  и  $f(t_1, \dots, t_n)$  — замкнутые термы нашей сигнатуры (то есть элементы носителя  $D$ ).

- Предикатный символ  $P$  арности  $n$  интерпретируем как предикат  $[P]$ , который истинен на замкнутых термах  $t_1, \dots, t_n$ , если

$$\Gamma \vdash P(t_1, \dots, t_n)$$

- Наша цель — доказать (индуктивно по структуре формулы), что в построенной интерпретации истинны все формулы из  $\Gamma$ .
- Но наша интерпретация может быть слишком бедной: может оказаться, что  $\Gamma \vdash \exists x A(x)$ , но ни для какого замкнутого термина  $t$  формула  $A(t)$  не выводима из  $\Gamma$ .
- Теория  $\Gamma$  называется *экзистенциально полной* в сигнатуре  $\sigma$ , если для всякой замкнутой формулы  $\exists x \varphi$ , являющейся теоремой этой сигнатуры, найдется терм  $t$  этой сигнатуры, такой что  $\Gamma \vdash \varphi(x := t)$ .

- **Лемма (об экзистенциальном пополнении).** Пусть  $\Gamma$  — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры  $\sigma$ , причем из  $\Gamma$  выводима замкнутая формула  $\exists x\varphi$ . Пусть  $c$  — свежая для  $\Gamma$  и  $\varphi$  константа. Тогда множество  $\Gamma, \varphi(x := c)$  непротиворечиво.
- **Доказательство.** Пусть  $\Gamma, \varphi(x := c)$  противоречиво. Тогда имеется конечное  $\Delta \subset \Gamma$ , такое что

- 1  $\Delta \vdash \neg\varphi(x := c)$
- 2  $\Delta \vdash \neg\varphi$  FreshConstLemma
- 3  $\vdash \bigwedge_i \Delta \rightarrow \neg\varphi$  DeductLemma
- 4  $\vdash \varphi \rightarrow \neg(\bigwedge_i \Delta)$  Contraposition
- 5  $\vdash \exists x\varphi \rightarrow \neg(\bigwedge_i \Delta)$  В $\exists$

Но по условию  $\Gamma \vdash \exists x\varphi$ , значит  $\Delta$  противоречиво, а значит и  $\Gamma$ . Противоречие. ■

- **Лемма.** Пусть  $\Gamma$  — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры  $\sigma$ . Тогда существует расширение сигнатуры  $\sigma$  новыми константами и расширение множества  $\Gamma$  до множества  $\Delta$ , такого что оно непротиворечиво, полно и экзистенциально полно в расширенной сигнатуре.
- **Доказательство.**
  - 1 Последовательно применим лемму об экзистенциальном пополнении ко всем замкнутым формулам вида  $\exists x\varphi$ , выводимым из  $\Gamma$ .
  - 2 Пополним это множество, применив лемму о пополнении.Повторим эти два шага счетное число раз. Объединение полученных множеств будет непротиворечивым, полным и экзистенциально полным. ■



**Лемма.** Пусть  $\Gamma$  — полное и экзистенциально полное множество замкнутых формул сигнатуры  $\sigma$ . Тогда существует интерпретация  $M$  сигнатуры  $\sigma$ , в которой истинны все формулы из  $\Gamma$ .

**Доказательство.** Возьмем в качестве носителя  $M$  все замкнутые термы сигнатуры  $\sigma$ . Интерпретация функциональных и предикатных символов описана ранее. Индукцией по числу связок и кванторов формулы  $\varphi$  докажем

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow [\varphi] = T$$

**База.** Атомарные формулы таковы по построению (см. интерпретацию предикатных символов).

**Индукционный переход. (пропозициональные связки)**  
Аналогично доказательству для исчисления высказываний.  
Проверяем, что выводимость и истинность “устроены одинаково”

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash \neg \varphi &\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \text{ или } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi &\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \text{ и } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi &\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \varphi \text{ или } \Gamma \vdash \psi\end{aligned}$$

Это легко показать, поскольку любые частные случаи пропозициональных тавтологий выводимы.

**Индукционный переход. (квантор  $\exists$ )** Пусть  $\varphi$  имеет вид  $\exists x\psi$  (в  $\psi$  единственный параметр —  $x$ ).

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\Gamma \vdash \exists x\psi$ . Из экзистенциальной полноты  $\Gamma$  следует существование константы  $c$ , такой что  $\Gamma \vdash \psi(x := c)$ . В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в  $M$  она истинна:  $[\psi(x := c)] = T$ . Тогда  $\psi$  истинна на оценке  $v(x) = c$ , откуда  $[\exists x\psi] = T$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $[\exists x\psi] = T$ . Тогда найдется элемент носителя ( $y$  нас — замкнутый терм  $t$ ), для которого  $[\psi]_{x:=t} = T$ . Отсюда в нашей интерпретации  $[\psi(x := t)] = T$ . По (IH)  $\Gamma \vdash \psi(x := t)$ , откуда, используя аксиому 13  $\psi(x := t) \rightarrow \exists x\psi$ , заключаем, что  $\Gamma \vdash \exists x\psi$ .

**Индукционный переход. (квантор  $\forall$ )** Пусть  $\varphi$  имеет вид  $\forall x\psi$  (в  $\psi$  единственный параметр —  $x$ ).

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\Gamma \vdash \forall x\psi$ . Отсюда (по аксиоме 12  $\forall x\psi \rightarrow \psi(x := t)$ ) для любого замкнутого терма  $t$  нашей сигнатуры  $\Gamma \vdash \psi(x := t)$ . В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в  $M$  она истинна:  $[\psi(x := t)] = T$ . Итак  $\psi$  истина на любой оценке  $v(x) = t$ , откуда  $[\forall x\psi] = T$ .

( $\Leftarrow$ ) (контрапозиция). Пусть  $\Gamma \not\vdash \forall x\psi$ , тогда из полноты  $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$ , что доказуемо эквивалентно  $\Gamma \vdash \exists x\neg\psi$ . Из экзистенциальной полноты  $\Gamma$  следует существование константы  $c$ , такой что  $\Gamma \vdash \neg\psi(x := c)$ . В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в  $M$  она истинна:  $[\neg\psi(x := c)] = T$ . Тогда  $\neg\psi$  истинна на оценке  $v(x) = c$ , откуда  $[\forall x\psi] = F$ .



- **Теорема** Непротиворечивое множество замкнутых формул имеет модель.

**Доказательство.** Расширяем множество до полного и экзистенциально полного и берем в качестве модели построенную выше интерпретацию ■.

- **Теорема о полноте ИП (сильная форма)** Любая непротиворечивая теория совместна.

- **Теорема о полноте ИП (слабая форма)** Любая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi$  общезначима, **замкнута** и невыводима. Тогда  $\{\neg\varphi\}$  непротиворечиво, а значит имеет модель. В этой модели  $[\neg\varphi] = \text{T}$ , откуда  $[\varphi] = \text{F}$ , что противоречит общезначимости  $\varphi$ . ■.

- **Теорема (о счетной модели)** Непротиворечивое множество замкнутых формул конечной или счетной сигнатуры имеет счетную модель.
- **Доказательство.** Наша модель, полученная пополнением и экзистенциальным пополнением, счетна. ■
- **Теорема (о компактности)** Пусть  $\Gamma$  — бесконечное множество замкнутых формул сигнатуры  $\sigma$ . Пусть любое его конечное подмножество имеет модель. Тогда само  $\Gamma$  тоже имеет модель.
- **Доказательство.** Наличие модели равносильно непротиворечивости. Но противоречие выводится из конечного числа формул  $\Gamma$ . ■