

Математическая логика и теория вычислимости

Лекции 9. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

07.04.2021

- 1 Леммы о константах
- 2 Теорема Гёделя о полноте
- 3 Теорема Эрбрана и сколемизация
- 4 Понижение мощности
- 5 Невыразимые предикаты
- 6 Элиминация кванторов

- 1 Леммы о константах
- 2 Теорема Гёделя о полноте
- 3 Теорема Эрбрана и сколемизация
- 4 Понижение мощности
- 5 Невыразимые предикаты
- 6 Элиминация кванторов

- **Лемма (о свежих константах).** Пусть φ — формула ИП, а c — константа, не входящая в эту формулу. Тогда выводимость $\varphi(x := c)$ влечет выводимость φ .
- **Доказательство.** Возьмем свежую для φ переменную y . Вывод $\varphi(x := c)$ при замене c на y останется выводом (кванторов по ней нет).

1	$\varphi(x := y)$	Assumption
2	$\forall y \varphi(x := y)$	Gen
3	$\forall y \varphi(x := y) \rightarrow \varphi(x := y)(y := x)$	A12
4	$\varphi(x := y)(y := x)$	MP(2)(3)
5	φ	



- Лемма легко обобщается на случай нескольких констант.

- **Лемма (о добавлении констант).** Пусть φ — формула ИП некоторой сигнатуры σ . Пусть она выводима в сигнатуре σ' , полученной из σ добавлением новых констант. Тогда φ выводима в ИП сигнатуры σ .
- **Доказательство.** Если в выводе формулы φ в σ' встречаются новые константы, заменяем их на свежие переменные. ■
- Лемма легко обобщается для произвольного расширения сигнатуры.
- Это означает, что можно говорить о выводимости формулы, не уточняя, в какой сигнатуре мы ищем вывод.

- 1 Леммы о константах
- 2 Теорема Гёделя о полноте
- 3 Теорема Эрбрана и сколемизация
- 4 Понижение мощности
- 5 Невыразимые предикаты
- 6 Элиминация кванторов

- Фиксируем сигнатуру σ и рассмотрим теорию Γ в этой сигнатуре.
- Теория Γ называется *противоречивой*, если в ней выводима некоторая формула и ее отрицание. В противном случае теория называется *непротиворечивой*.
- В противоречивой теории выводима любая формула:

1	$\Gamma \vdash \varphi$	Assumption
2	$\Gamma \vdash \neg\varphi$	Assumption
3	$\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \psi$	A9
4	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$	MP(2)(3)
5	$\Gamma \vdash \psi$	MP(1)(4)

- Любое подмножество непротиворечивого множества непротиворечиво.
- У бесконечного противоречивого множества есть конечное противоречивое подмножество.

- Интерпретация M сигнатуры σ называется *моделью* теории Γ , если все формулы из Γ истинны в M .
- **Теорема о корректности ИП (ver.2).** Все теоремы теории Γ истинны в любой модели M этой теории.
- Множество формул Γ называют *совместным*, если оно имеет модель.
- **Теорема о корректности ИП (ver.3).** Любое совместное множество замкнутых формул непротиворечиво.
Доказательство. (от противного) Пусть имеется замкнутая φ , такая что $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Но из совместности следует наличие модели M , в которой φ и $\neg\varphi$ должны быть истинны одновременно. ■

- Теория Γ в сигнатуре σ называется *полной* в этой сигнатуре если для любой **замкнутой** формулы φ **этой сигнатуры** либо φ , либо $\neg\varphi$ является теоремой теории Γ :

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{or} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

- Фиксация сигнатуры важна: если символ S не входит в сигнатуру σ , но используется в формуле ψ , то $\Gamma \not\vdash \psi$ и $\Gamma \not\vdash \neg\psi$, например

$$\Gamma \not\vdash \exists x S(x) \quad \Gamma \not\vdash \neg\exists x S(x)$$

- Замкнутость формулы φ тоже важна: множество истинных формул сигнатуры $(0^0, S^1, =^2)$ полно, но ни $x = y$, ни $\neg(x = y)$ из него не выводимо.

- Цель — доказать, что **любая непротиворечивая теория совместна**.
- Как это делалось в логике высказываний:
 - 1 расширили Γ до полного множества $\Delta \supset \Gamma$;
 - 2 для всякой пропозициональной переменной p полагали

$$p = T, \quad \text{if } \Delta \vdash p,$$

$$p = F, \quad \text{if } \Delta \vdash \neg p;$$

- 3 показывали, что такое означивание приводит к истинности всех формул Δ (а значит и Γ).
- В логике предикатов будем действовать по той же схеме.
 - Однако, у нас будут проблемы с шагом 2: нам нужно будет как-то смонтировать носитель интерпретации.

- **Лемма (о пополнении).** Всякое непротиворечивое множество Γ сигнатуры σ содержится в непротиворечивом полном множестве Δ той же сигнатуры.
- **Доказательство.** Пусть φ произвольная формула сигнатуры σ . Рассмотрим Γ, φ и $\Gamma, \neg\varphi$. Одно из них непротиворечиво. Действительно, если противоречивы оба, то

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \quad \Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}$$

То есть $\Gamma \vdash \neg\varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$, что противоречит непротиворечивости Γ . Будем теперь перебирать все допустимые формулы, добавляя к Γ либо формулу, либо отрицание, сохраняя непротиворечивость. ■

- Для работы с семантическим понятием совместности нам нужно задать некоторую интерпретацию. Возьмем в качестве носителя D множество всех *замкнутых* термов нашей сигнатуры σ (термов без переменных).
- Функциональные символы при этом интерпретируются “естественным образом”: функциональному символу f арности n ставится в соответствие такая функция $[f]$

$$[f]([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$$

Здесь t_1, \dots, t_n и $f(t_1, \dots, t_n)$ — замкнутые термы нашей сигнатуры (то есть элементы носителя D).

- Предикатный символ P арности n интерпретируем как предикат $[P]$, который истинен на замкнутых термах t_1, \dots, t_n , если

$$\Gamma \vdash P(t_1, \dots, t_n)$$

- Наша цель — доказать (индуктивно по структуре формулы), что в построенной интерпретации истинны все формулы из Γ .
- Но наша интерпретация может быть слишком бедной: может оказаться, что $\Gamma \vdash \exists x A(x)$, но ни для какого замкнутого термина t формула $A(t)$ не выводима из Γ .
- Теория Γ называется *экзистенциально полной* в сигнатуре σ , если для всякой замкнутой формулы $\exists x \varphi$, являющейся теоремой этой сигнатуры, найдется терм t этой сигнатуры, такой что $\Gamma \vdash \varphi(x := t)$.

Лемма об экзистенциальном пополнении

- **Лемма (об экзистенциальном пополнении).** Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры σ , причем из Γ выводима замкнутая формула $\exists x\varphi$. Пусть c — свежая для Γ и φ константа. Тогда множество $\Gamma, \varphi(x := c)$ непротиворечиво.
- **Доказательство.** Пусть $\Gamma, \varphi(x := c)$ противоречиво. Тогда имеется конечное $\Delta \subset \Gamma$, такое что

- 1 $\Delta \vdash \neg\varphi(x := c)$
- 2 $\Delta \vdash \neg\varphi$ FreshConstLemma
- 3 $\vdash \bigwedge_i \Delta \rightarrow \neg\varphi$ DeductLemma
- 4 $\vdash \varphi \rightarrow \neg(\bigwedge_i \Delta)$ Contraposition
- 5 $\vdash \exists x\varphi \rightarrow \neg(\bigwedge_i \Delta)$ В \exists

Но по условию $\Gamma \vdash \exists x\varphi$, значит Δ противоречиво, а значит и Γ . Противоречие. ■

- **Лемма.** Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры σ . Тогда существует расширение сигнатуры σ новыми константами и расширение множества Γ до множества Δ , такого что оно непротиворечиво, полно и экзистенциально полно в расширенной сигнатуре.
- **Доказательство.**
 - 1 Последовательно применим лемму об экзистенциальном пополнении ко всем замкнутым формулам вида $\exists x\varphi$, выводимым из Γ .
 - 2 Пополним это множество, применив лемму о пополнении.Повторим эти два шага счетное число раз. Объединение полученных множеств будет непротиворечивым, полным и экзистенциально полным. ■

Лемма. Пусть Γ — полное и экзистенциально полное множество замкнутых формул сигнатуры σ . Тогда существует интерпретация M сигнатуры σ , в которой истинны все формулы из Γ .

Доказательство. Возьмем в качестве носителя M все замкнутые термы сигнатуры σ . Интерпретация функциональных и предикатных символов описана ранее. Индукцией по числу связок и кванторов формулы φ докажем

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow [\varphi] = T$$

База. Атомарные формулы таковы по построению (см. интерпретацию предикатных символов).

Индукционный переход. (пропозициональные связки)
Аналогично доказательству для исчисления высказываний.
Проверяем, что выводимость и истинность “устроены одинаково”

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash \neg \varphi &\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \text{ или } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi &\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \text{ и } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi &\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \varphi \text{ или } \Gamma \vdash \psi\end{aligned}$$

Это легко показать, поскольку любые частные случаи пропозициональных тавтологий выводимы.

Индукционный переход. (квантор \exists) Пусть φ имеет вид $\exists x\psi$ (в ψ единственный параметр — x).

(\Rightarrow) Пусть $\Gamma \vdash \exists x\psi$. Из экзистенциальной полноты Γ следует существование константы c , такой что $\Gamma \vdash \psi(x := c)$. В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в M она истинна:

$[\psi(x := c)] = T$. Тогда ψ истинна на оценке $v(x) = c$, откуда $[\exists x\psi] = T$.

(\Leftarrow) Пусть $[\exists x\psi] = T$. Тогда найдется элемент носителя (y нас — замкнутый терм t), для которого $[\psi]_{x:=t} = T$. Отсюда в нашей интерпретации $[\psi(x := t)] = T$. По (IH) $\Gamma \vdash \psi(x := t)$, откуда, используя аксиому 13 $\psi(x := t) \rightarrow \exists x\psi$, заключаем, что $\Gamma \vdash \exists x\psi$.

Индукционный переход. (квантор \forall) Пусть φ имеет вид $\forall x\psi$ (в ψ единственный параметр — x).

(\Rightarrow) Пусть $\Gamma \vdash \forall x\psi$. Отсюда (по аксиоме 12 $\forall x\psi \rightarrow \psi(x := t)$) для любого замкнутого терма t нашей сигнатуры $\Gamma \vdash \psi(x := t)$. В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в M она истинна: $[\psi(x := t)] = T$. Итак ψ истина на любой оценке $v(x) = t$, откуда $[\forall x\psi] = T$.

(\Leftarrow) (контрапозиция). Пусть $\Gamma \not\vdash \forall x\psi$, тогда из полноты $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, что доказуемо эквивалентно $\Gamma \vdash \exists x\neg\psi$. Из экзистенциальной полноты Γ следует существование константы c , такой что $\Gamma \vdash \neg\psi(x := c)$. В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в M она истинна: $[\neg\psi(x := c)] = T$. Тогда $\neg\psi$ истинна на оценке $v(x) = c$, откуда $[\forall x\psi] = F$.



- **Теорема** Непротиворечивое множество замкнутых формул имеет модель.

Доказательство. Расширяем множество до полного и экзистенциально полного и берем в качестве модели построенную выше интерпретацию ■.

- **Теорема о полноте ИП (сильная форма)** Любая непротиворечивая теория совместна.

- **Теорема о полноте ИП (слабая форма)** Любая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов.

Доказательство. Пусть φ общезначима, **замкнута** и невыводима. Тогда $\{\neg\varphi\}$ непротиворечиво, а значит имеет модель. В этой модели $[\neg\varphi] = \text{T}$, откуда $[\varphi] = \text{F}$, что противоречит общезначимости φ . ■

- **Теорема (о счетной модели)** Непротиворечивое множество замкнутых формул конечной или счетной сигнатуры имеет счетную модель.
- **Доказательство.** Наша модель, полученная пополнением и экзистенциальным пополнением, счетна. ■
- **Теорема (о компактности)** Пусть Γ — бесконечное множество замкнутых формул сигнатуры σ . Пусть любое его конечное подмножество имеет модель. Тогда само Γ тоже имеет модель.
- **Доказательство.** Наличие модели равносильно непротиворечивости. Но противоречие выводится из конечного числа формул Γ . ■

- 1 Леммы о константах
- 2 Теорема Гёделя о полноте
- 3 Теорема Эрбрана и сколемизация**
- 4 Понижение мощности
- 5 Невыразимые предикаты
- 6 Элиминация кванторов

- Формула φ находится в *предваренной нормальной форме*, если она имеет вид $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi$, где Q_i – квантор, а ψ – безкванторная формула.
- Предваренной нормальной формой формулы φ называется формула φ' , такая что φ' находится в ПНФ, и $\varphi \leftrightarrow \varphi'$.
- Предваренная формула называется Σ_n -формулой, если ее кванторная приставка содержит n групп кванторов, причём первыми стоят кванторы существования.
- Предваренная формула называется Π_n -формулой, если ее кванторная приставка содержит n групп кванторов, причём первыми стоят кванторы всеобщности.

- Всякая формула из класса Σ_n или Π_n доказуемо эквивалентна формуле из класса Σ_{n+1} , а также формуле из класса Π_{n+1} .
- Отрицание любой формулы из класса Σ_n доказуемо эквивалентно некоторой формуле из класса Π_n и наоборот.
- Конъюнкция и дизъюнкция любых двух формул из Π_n доказуемо эквивалентна некоторой формуле из Π_n .
- Конъюнкция и дизъюнкция любых двух формул из Σ_n доказуемо эквивалентна некоторой формуле из Σ_n .
- **Теорема.** Любая формула имеет предваренную нормальную форму. (мы ее уже доказывали)

- Если в бескванторной формуле ϕ заменить атомарные подформулы на переменные (одинаковые — на одинаковые, разные — на разные), то получившаяся пропозициональная формула называется *прототипом* исходной.
- **Теорема.** Бескванторная формула выводима (общезначима) тогда и только тогда, когда её прототип является тавтологией.
- (\Leftarrow) Тривиально.
- (\Rightarrow) (контрапозиция). Пусть прототип ϕ — не тавтология. Легко предъявить интерпретацию, где ϕ будет ложной. Носитель — замкнутые термы, значения предикатов подбираются согласованно с обращением в ложь прототипа. ■

- **Теорема.** Формула класса Π_1 выводима (общезначима) тогда и только тогда, когда общезначима ее бескванторная часть.
- **Доказательство.** Тривиально. ■

- **Теорема Эрбрана.** Формула $\exists x_1 \dots \exists x_k \varphi$ (где φ — бескванторная) общезначима тогда и только тогда, когда существует конечный список подстановок

$$\varphi(x_1 := t_{11}, \dots, x_k := t_{1k})$$

$$\varphi(x_1 := t_{21}, \dots, x_k := t_{2k})$$

...

$$\varphi(x_1 := t_{n1}, \dots, x_k := t_{nk})$$

дизъюнкция которых общезначима.

- Эту дизъюнкцию называют эбрановской.
- **Пример.** Пусть P — предикатный символ, а A и B — предметные константы сигнатуры. Тогда формула $\exists x(P(A, x) \rightarrow P(x, B))$ общезначима.

- (\Leftarrow) Квантор \exists это дизъюнкция по всем элементам носителя, если часть этой дизъюнкции общезначима, то и вся она тоже.
- (\Rightarrow) Пусть φ не содержит переменных, кроме x_1, \dots, x_k (остальные можно заменить константами). Рассмотрим для всех наборов замкнутых термов t_1, \dots, t_k бесконечное множество формул

$$\neg\varphi(x_1 := t_1, \dots, x_k := t_k)$$

- Оно противоречиво. Тогда берем в качестве эрбрановской дизъюнкции отрицаний конечного набора отрицаний, используемых при выводе противоречия.
- Оно непротиворечиво. Этого не может быть, поскольку тогда у него есть модель, в которой $\exists x_1 \dots \exists x_k \varphi$ можно сделать ложной. ■

- Если сигнатура не содержит функциональных символов, то мы можем алгоритмически проверять выводимость формул класса Σ_1 (число подстановок конечно).
- Это верно и для класса Π_2 .
- Но не для более богатых классов.

- Рассмотрим утверждение

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

- Оно эквивалентно существованию функции, которая по любому x возвращает y , такой, что $P(x, y)$.
- Но это невыразимо в логиках первого порядка:

$$\forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists f \forall x P(x, f(x))$$

- Однако можно ввести новый унарный функциональный символ f , при этом выполнимость $\forall x \exists y \varphi$ равносильно выполнимости

$$\forall x \varphi(y := f(x))$$

- **Пример.** Формула

$$\forall x \forall y \exists z \forall u \exists v \varphi(x, y, z, u, v)$$

выполнима тогда и только тогда, когда выполнима

$$\forall x \forall y \forall u \varphi(x, y, f(x, y), u, g(x, y, u))$$

где f и g — свежие функциональные символы подходящей арности.

- **Теорема.** Для всякой замкнутой формулы φ сигнатуры σ существует формула φ' класса Π_1 сигнатуры σ с добавленными функциональными символами, которая выполнима или невыполнима одновременно с φ .

- Формула невыполнима тогда и только тогда, когда ее отрицание общезначимо.
- То есть общезначимость $\neg\forall x\exists yP(x, y)$ равносильна общезначимости

$$\neg\forall xP(x, f(x)).$$

- Вводя $Q = \neg P$ получаем, что одновременно общезначимы

$$\exists x\forall yQ(x, y) \quad \text{и} \quad \exists xQ(x, f(x))$$

- **Теорема.** Для всякой замкнутой формулы φ сигнатуры σ существует формула φ'' класса Σ_1 сигнатуры σ с добавленными функциональными символами, которая общезначима или необщезначима одновременно с φ .
- Дальше φ'' можно перевести на безкванторный язык по теореме Эрбрана.

- Полнота исчисления предикатов позволяет заменять общезначимость на выводимость.
- Вопрос о выводимости произвольной формулы мы свели к выводимости формулы из Σ_1 (с функциональными символами).
- Вопрос о выводимости произвольной формулы логики предикатов первого порядка алгоритмически неразрешим, поэтому неразрешим вопрос о выводимости формулы из Σ_1 (с функциональными символами).

- 1 Леммы о константах
- 2 Теорема Гёделя о полноте
- 3 Теорема Эрбрана и сколемизация
- 4 Понижение мощности**
- 5 Невыразимые предикаты
- 6 Элиминация кванторов

- Две интерпретации заданной сигнатуры σ называют **элементарно эквивалентными**, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы данной сигнатуры.
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D_1 \rightarrow D_2$ называется *изоморфизмом* интерпретаций, если оно сохраняет все функции и предикаты этих интерпретаций. А именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{aligned} [P]_2 (\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &\Leftrightarrow [P]_1 (x_1, \dots, x_n) \\ [f]_2 (\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &= \alpha([f]_1 (x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

на любых наборах $x_1, \dots, x_n \in D_1$.

- **Теорема.** Изоморфные интерпретации элементарно эквивалентны.

- Пусть имеется интерпретация некоторой сигнатуры с носителем D . Рассмотрим подмножество $D' \subset D$. Если D' замкнуто относительно сигнатурных функций, то получится новая интерпретация, называемая *подструктурой* исходной.
- **Теорема (Левенгейм-Сколем)**. Пусть дана конечная или счетная сигнатура σ и ее бесконечная интерпретация с носителем D . Тогда имеется подструктура со счетным носителем $D' \subset D$ элементарно эквивалентная исходной.
- **Доказательство (скетч)**. Берем произвольное счетное подмножество, расширяем его до замкнутого относительно сигнатурных функций и экзистенциально замкнутого. Повторяем счетное число раз. ■ (см. Верещагин, Шень, ЯиИ, 3.11)

- 1 Леммы о константах
- 2 Теорема Гёделя о полноте
- 3 Теорема Эрбрана и сколемизация
- 4 Понижение мощности
- 5 Невыразимые предикаты**
- 6 Элиминация кванторов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем \mathbb{N} и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq) мы можем выразить так:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем \mathbb{N} и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq) мы можем выразить так:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на \mathbb{Z} ?

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем \mathbb{N} и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq) мы можем выразить так:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на \mathbb{Z} ?
- Порядок станет невыразимым!

- Пусть дана сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D .
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D \rightarrow D$ называется *автоморфизмом* интерпретации, если все функции и предикаты этой интерпретации *устойчивы* относительно α , а именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{aligned} [P](\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &\Leftrightarrow [P](x_1, \dots, x_n) \\ [f](\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &= \alpha([f](x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

на любых наборах $x_1, \dots, x_n \in D$.

- Например, отображение $x \mapsto -x$ является автоморфизмом для нормальной интерпретации сигнатуры $(+^2, =^2)$ с носителем \mathbb{Z} и $[+] = +$.

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**

- Рассмотрим произвольную оценку v и обозначим $\alpha \circ v$ новую оценку, полученную применением автоморфизма α к v .
- Индукцией по структуре терма показываем

$$[t]_{\alpha \circ v} = \alpha([t]_v)$$

- Индукцией по структуре формулы показываем

$$[\varphi]_{\alpha \circ v} = \alpha([\varphi]_v) \quad \blacksquare$$

- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель \mathbb{Z} , естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$.

Аutomorphism —

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**

- Рассмотрим произвольную оценку v и обозначим $\alpha \circ v$ новую оценку, полученную применением автоморфизма α к v .
- Индукцией по структуре терма показываем

$$[t]_{\alpha \circ v} = \alpha([t]_v)$$

- Индукцией по структуре формулы показываем

$$[\varphi]_{\alpha \circ v} = \alpha([\varphi]_v) \quad \blacksquare$$

- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель \mathbb{Z} , естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$.

Аutomorphism — $x \mapsto x + 42$.

- 1 Леммы о константах
- 2 Теорема Гёделя о полноте
- 3 Теорема Эрбрана и сколемизация
- 4 Понижение мощности
- 5 Невыразимые предикаты
- 6 Элиминация кванторов**

- Мы умеем доказывать невыразимость предиката (в заданных сигнатуре и интерпретации), показывая его неустойчивость относительно некоторого автоморфизма.
- Но, например, весьма бедная пара из сигнатуры $(0^0, S^1, =^2)$ и нормальной интерпретации с носителем \mathbb{Z} , $[0] = 0$ и $[S] = \lambda x.x + 1$ не имеет ни одного автоморфизма.
Почему $x \mapsto x + 1$ не подходит?
- Более общий способ:
 - предъявить класс предикатов;
 - индуктивно доказать что он содержит все выразимые;
 - показать, что наш предикат не содержится в этом классе.
- Сконструируем такой класс для приведенного примера (это будут предикаты, выразимые бескванторными формулами).

- Две формулы A и B данной сигнатуры назовем *эквивалентными* в данной интерпретации (нотация $A \sim B$), если они выражают один и тот же предикат.
- **Утверждение.** Для любой формулы рассматриваемой сигнатуры в рассматриваемой интерпретации имеется эквивалентная ей бескванторная формула.
- **Доказательство.** (Индукция по длине формулы.)
Формула $\forall x\varphi$ эквивалентна $\neg\exists x\neg\varphi$, поэтому единственный живой случай — когда формула имеет вид

$$\psi = \exists x\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$$

где (по IH) φ — бескванторная, то есть сконструированная пропозициональными связками из атомарных формул вида

$$S(S(\dots(S(u))\dots)) = S(S(\dots(S(v))\dots))$$

Атомарные формулы

$$S(S(\dots(S(u))\dots)) = S(S(\dots(S(v))\dots))$$

могут иметь вид (1) $x = x + c$ (меняем на истину при $c = 0$, на ложь в остальных случаях), (2) $x = c$, (3) $x + c = 0$, (4) $x = x_i + c$, (5) $x + c = x_i$.

Иначе говоря, все атомарные формулы можно записать в виде $x = t_i$, где t_i либо целая константа C_i , либо $x_j + C_i$ (C_i может быть и меньше нуля!). Построим

$$\psi' = \varphi(t_1, x_1, \dots, x_n) \vee \varphi(t_2, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi'' = \varphi[(x = t_1) := F][(x = t_2) := F] \dots [(x = t_k) := F]$$

$$\psi = \exists x \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi \sim \psi' \vee \psi'' \quad \blacksquare$$

- Отношения порядка $x < y$ невыразимо в наших сигнатуре и интерпретации.
- Действительно, кванторы допускают элиминацию, а все атомарные формулы имеют вид $x = y + C$.
- Но формулы такого типа не различают ситуации $x \gg y$ и $x \ll y$.

- Рассмотрим расширенную сигнатуру $(0^0, S^1, =^2, <^2)$ и ее нормальную интерпретацию с носителем \mathbb{Z} , $[0] = 0$, $[S] = \lambda x.x + 1$ и $[<] = <$.
- **Утверждение.** Для любой формулы расширенной сигнатуры в рассматриваемой интерпретации имеется эквивалентная ей бескванторная формула.
- **Доказательство.**
 - Теперь атомарных формул больше, помимо $x = t_i$ у нас будут $x < t_i$ и $t_i < x$.
 - Вместо ψ'' нам нужно попробовать числа из всех промежутков, на которые $\{t_i\}$ разбивает \mathbb{Z}
 - Подойдет такая конструкция

$$\psi' = \varphi(t_1, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi'' = \varphi(t_1 - 1, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k - 1, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi''' = \varphi(t_1 + 1, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k + 1, x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi \sim \psi' \vee \psi'' \vee \psi''' \quad \blacksquare$$