1 Логика предикатов

1.1 Сколемизация

Введём понятие *сколемовской нормальной формы*. Формула находится в сколемовской нормальной форме, если она находится в предварённой нормальной форме, а также в ней не встречаются кванторы существования (есть лишь кванторы всеобщности).

- $P(x) \wedge \forall y P(y)$ — формула не в ПНФ (а значит, не в СНФ);
- $P(x) \wedge P(y)$ — формула в ПНФ и СНФ;
- $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y))$ — формула в ПНФ и СНФ;
- $\forall x \exists y (P(x) \wedge P(y))$ — формула в ПНФ, но не в СНФ, так как в ней есть квантор существования.

Назовём *сколемизацией* формулы φ в сигнатуре σ (где φ в ПНФ) следующий процесс получения формулы φ' в СНФ в какой-то новой сигнатуре σ':

1. Если кванторов существования не осталось, закончили. Иначе возьмём самый левый квантор существования.
2. Посчитаем, сколько кванторов всеобщности есть слева от него. Пусть их было n.
3. Расширим сигнатуру новым функциональным символом арности n.
4. Зададим терм, который является применением нового символа к переменным, связанным в кванторах всеобщности слева от рассматриваемого квантора существования.
5. Заменим вхождения переменной, связанной данным квантором существования, на данный терм, и уберём квантор существования. Возвращаемся к первому шагу.

Пример сколемизации. Пусть была дана формула $\forall x \forall y \exists z (x = y + z)$ в сигнатуре $=^2, +^2$ (она верна, если её интерпретировать с носителем $\mathbb{Z}$). Сколемизируем её.

1. Находим первый квантор существования — $\exists z$.
2. Слева от него два квантора всеобщности: $\forall x$ и $\forall y$.
3. Введём новый функциональный символ $-^2$.
4. Зададим терм $x - y$.
5. Заменим в исходной формуле z на $x - y$. Получим $\forall x \forall y (x = y + (x - y))$ в сигнатуре $=^2, +^2, -^2$.

Сколемизация φ' формулы φ связана с самой формулой φ тем, что φ' *выполнима тогда и только тогда, когда выполнима* φ. Почему? Вспомним определение выполнимости: формула выполнима, если *существует какая-то интерпретация и какая-то оценка, на которой формула обращается в истину.* Убедимся, что выполнимость формул φ и φ' эквивалентна.

- Пусть φ выполнима. Возьмём интерпретацию и оценку, на которой она обращается в истину. Пусть она имеет вид $\forall x \forall y \cdots \forall z \exists a (\cdots)$. Если эта формула истинная, значит, при любом выборе $x, y, \cdots, z$ можно подобрать такой элемент носителя a, что $(\cdots)$ обратится в истину.

  Покажем теперь, что сколемизированная формула $\forall x \forall y \cdots \forall z (\cdots)[a := f(x, y, \cdots, z)]$ тоже выполнима. В качестве интерпретации всех символов, кроме нового, возьмём ту же, на которой обратилась в истину исходная формула; оценку возьмём тоже такую же. Вопрос в том, как интепретировать символ f. Будем в качестве $f(x, y, \cdots, z)$ возвращать ровно тот a, который приводил к истинности $(\cdots)$ в исходной формуле. Тогда сколемизированная формула будет истинной: тот элемент носителя a, который в исходной формуле находился грубым перебором, теперь будет явно зависеть от $x, y, \cdots, z$, но выбираться будет тем же образом.

- Пусть φ' выполнима. Покажем, что φ выполнима. Для этого заметим, что можно взять применения вида $f(x, y, \cdots, z)$ нового символа f и заменить его на какую-то новую переменную p. Если мы теперь поместим $\exists p$ после всех переменных, которые поданы как аргумент в f, то получим формулу, истинную на той же оценке и в той же интерпретации: $f(x, y, \cdots, z)$ — это *какой-то* элемент носителя, а значит, есть такой выбор элемента носителя в $\exists p$, на котором формула станет истинной.

Пример того, почему это доказательство работает. Рассмотрим снова формулу и её сколемизацию:

- $\forall x \forall y \exists z(x = y + z)$
- $\forall x \forall y(x = y + (x - y))$

Доказательства применяются тогда таким образом:

- Пусть мы знаем, что $\forall x \forall y \exists z(x = y + z)$ выполнимая. Это значит, что можно подобрать такие интерпретации $=$ и $+$ и такие оценки свободным переменным (которых тут нет), что формула оценится в истину. Рассмотрим произвольные элементы носителя b и c. Данная формула утверждает, что $\exists z(b = c + z)$; иными словами, при переборе элементов носителя она наталкивается на такой d, что $b = c + d$ в данной интерпретации. Тогда скажем, что в интерпретации $-^2$ будет $(b, c) \mapsto d$. Если переберём все возможные пары b и c, то таким образом построим функцию, которая будет возвращать ровно те элементы, которые были бы найдены перебором. Например, для $\exists z(4 = 1 + z)$ на целых числах формула при проверке своей истинности найдёт $z = 3$, но $(4 - 1) = 3$. В итоге мы получили операцию вычитания из знания истинности формулы φ.
- Пусть мы знаем, что $\forall x \forall y(x = y + (x - y))$. Правда ли, что $\forall x \forall y \exists z(x = y + z)$? Конечно, правда: в качестве z для любых x и y можно взять просто $x - y$.

1.2 Задания

1. Даны формулы. Про каждую укажите следующие факты:
   - Она общезначимая? Почему?
   - Она выполнимая? На какой оценке?
   - Она невыполнимая? Почему?

   (a) $\forall x P(x) \to \forall y P(y)$
   (b) $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$
   (c) $\forall x P(x) \to \exists x P(y)$
   (d) $((\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \to \forall x P(x)) \to P(z)$
   (e) $\forall x \forall y(P(x) \to P(y)) \to \exists x P(x) \to \forall x P(x)$
   (f) $(P(x) \to P(y)) \to \exists x P(x) \to \forall x P(x)$
   (g) $\forall x \neg P(x, x) \land \forall x \forall y(P(x, y) \to P(y, x)) \land \forall x \forall y \forall z(P(x, y) \to P(y, z) \to P(x, z))$
   (h) $(\exists x \varphi(x) \land \psi(x) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \land \psi(x))) \to A(x) \land \neg A(x)$
   (i) $(\psi(x) \to \forall x \varphi(x) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \to \varphi(x))) \to A(x) \land \neg A(x)$

2. Приведите формулы к предварённой нормальной форме (ПНФ), а затем к сколемовской нормальной форме (СНФ):

   (a) Сигнатура: функциональный символ $\times^2$ и предикатный символ $=^2$. Формула:

   $$\exists i(\forall x(x \times i = x \wedge i \times x = x) \wedge \forall x \exists y(x \times y = i \wedge y \times x = i)).$$

   После её сколемизации укажите, какая сигнатура получилась.

   (b) $\exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \wedge \exists z R(z)$

   (c) $\exists x P(x) \wedge \forall z P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \vee \exists z R(z)$

   (d) $\exists x P(x) \vee \forall z P(x) \rightarrow Q(z)$

3. Дана формула φ в некоторой сигнатуре σ, а также её сколемизация φ' в сигнатуре $\sigma \cup \tau$, где τ — это новые функциональные символы, которые потребовалось ввести, чтобы провести сколемизацию.

   Про каждое из последующих высказываний укажите, верное ли оно, и если да, то объясните, почему, а если нет, то приведите контрпример.

   (a) Возьмём какую-то интерпретацию сигнатуры σ. В этой интерпретации φ истинная на любой оценке. Тогда при хоть какой-то интерпретации τ известно, что φ' истинна на любой оценке.

   (b) Возьмём какую-то интерпретацию сигнатуры σ. В этой интерпретации φ истинная на какой-то оценке. Тогда при любой интерпретации τ известно, что φ' истинна на какой-то оценке.

   (c) Возьмём какую-то интерпретацию сигнатуры σ. В этой интерпретации φ истинная на любой оценке. Тогда при любой интерпретации τ известно, что φ' истинна на какой-то оценке.

   (d) Если φ — тавтология, то φ' тоже.

   (e) $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ — тавтология в сигнатуре $\sigma \cup \tau$.

   (f) $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ выполнимая в сигнатуре $\sigma \cup \tau$.

4. Фактормножеством множества A по отношению эквивалентности $(\sim) \subseteq A \times A$ будем называть множество классов эквивалентности. Обозначим его за $A/(\sim)$.

   Даны примеры некоторых отношений эквивалентности.

   - Для каждого приведите описание двух **неконстантных** функций:
     - Функция, которая, принимая элементы исходного множества из одного и того же класса эквивалентности, возвращает для них одинаковый результат.
     - Функция, которая иногда даёт разные результаты на элементах из одного класса эквивалентности.
   - Для каждого объясните, чему эквивалентно фактормножество по этому отношению.

   (a) Отношение над целыми числами, где $a \sim b$ ровно тогда, когда $a - b$ делится на 11.

   (b) Отношение над парами натуральных чисел, где $(a, b) \sim (c, d)$ ровно тогда, когда $a + d = b + c$.

   (c) Отношение над парами целых чисел, где $(a, b) \sim (c, d)$ ровно тогда, когда $a \cdot d = b \cdot c$.

   (d) Отношение над Haskell-функциями с типом `Int -> Int`, где $p_1 \sim p_2$ ровно тогда, когда они зависают на одних и тех же входах.