Принцип Дирихле и математическая индукция.

1. В ящике лежат десять белых и двенадцать черных носков. Какое минимальное количество носков нужно вытащить, чтобы на выходе гарантированно получить пару носков одинакового цвета?

2. Какое максимальное количество королей можно поместить на шахматную доску (стандартного размера 8×8) так, чтобы эти короли не били друг друга?

3. Сколько людей нужно выбрать из группы, состоящей из двадцати супружеских пар, чтобы в выборку гарантированно вошла хотя бы одна супружеская пара?

4. Докажите, что в последовательности чисел 7, 77, 777 ... один из первых 2014 членов данной последовательности делится на 2013.

5. Докажите, что в любом $(n+1)$-элементном подмножестве множества первых $2n$ чисел обязательно найдутся по крайней мере два взаимно-простых числа.

6. Внутри единичного квадрата разбросано десять точек. Докажите, что существуют хотя бы две из них, которые расположены ближе, чем 0.48, и хотя бы три из них, которые покрываются кругом, радиус которого равен 0.5.

7. Имеется произвольная последовательность $a_1, \dots, a_n$ целых чисел, не обязательно различных. Докажите, что в такой последовательности обязательно найдется отрезок $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l$, сумма элементов которого $\sum_{i=k+1}^{l}$ делится на n.

8. Десять студентов за одно занятие решили 35 задач. Известно, что среди студентов есть те, кто решил ровно одну задачу, ровно две задачи и ровно три задачи. Докажите, что среди десяти студентов найдется хотя бы один студент, решивший как минимум пять задач.

9. Докажите, что для любого натурального n верно $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10. Докажите, что для любого натурального n верно $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

11. Докажите, что для любого натурального n верно $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.

12. Доказать, что квадрат можно разрезать на n квадратов (возможно, разных размеров) при любом $n \geq 6$.

13. Доказать, что если из доски размера $2^n \times 2^n$ вырезать произвольную клетку, то полученную доску можно замостить уголками из 3 клеток.

14. Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.

15. Футбольная команда за сезон отыграла 30 матчей и забила соперникам в совокупности 53 гола. Известно, что в каждой игре команда забивала хотя бы один гол. Докажите, что существует непрерывная последовательность игр, в течение которой команда забила ровно шесть голов. Останется ли утверждение верным в случае, если команда забъет не 53, а 60 голов?

16. Докажите, что в произвольном $(n+2)$-м подмножестве множества $\{1, 2, \dots, 3n\}$ чисел обязательно найдутся хотя бы два числа, разность которых строго больше n и строго меньше $2n$.

17. Докажите, что

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\cdots(n-1)\sqrt{n}}}} < 3$$

18. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?