Домашнее задание 1. Принцип Дирихле.

Количество баллов на зачёт: 7,5

1. (0,5 балла) В ящике лежат 10 белых и 12 чёрный носков. Какое минималльное количество из них надо взять, чтобы среди них обязательно нашлись два носка одного цвета?

2. (1 балл) Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 сантиметр расположено 17 точек. Докажите, что расстояние межд каиким-то двумя из них не превосходит $0,25$ сантиметров.

3. (2 балла) Какое максимальное количество королей можно поместить на шахматную доску так, чтобы никакие два короля не били друг друга?

4. (1,5 балла) Докажите, что в любом $(n+1)$-элементном подмножестве множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ обязательно найдутся два взаимно простых числа.

5. (2 балла) Дана последовательность $a_1, \ldots, a_n$ целых чисел, не обязательно различных. Докажите, что в такой последовательности обязательно найдется отрезок $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$, сумма элементов которого $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ делится на n.

6. (1 балл) Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в 3 цвета. Докажите, что можно выбрать прямоугольник со сторонами, идущими по линиям сетки, все четыре вершины которого покрашены в один цвет.

7. (1,5 балла) Даны 9 натуральных чисел, ни одной из которых не имеется простого делителя, большего, чем 5. Докажите, что среди них надутся два числа, произведение которых является точным квадратом.

8. (2,5 балла) Множество состоит из первых $2n$ натуральных чисел. В нём выбрали подмножество из $(n+1)$ элемента. Докажите, что в этом подмножестве найдутся два числа, одно из которых делится на другое. *Подсказка: Придумайте "ящики"так, чтобы в каждом любое большее число делилось на меньшее.*

9. (0 баллов) Докажите, что любая последовательность из $nm+1$ целых чисел содержит либо убывающую подпоследовательность, состоящую не менее, чем из $(n+1)$-го числа, либо возрастающую подпоследовательность, состоящую из не менее чем $(m+1)$-го числа.