Вероятности

1. В процессе экзамена преподаватель задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать вопросы после первого неверного ответа на задаваемый студенту вопрос. Вероятность правильного ответа на каждый вопрос равна 0.9. Постройте закон распределения дискретной случайной величины ξ, равной количеству дополнительных вопросов, задаваемых студенту. Найдите количество дополнительных вопросов, которое имеет наибольшую вероятность.

   Решение

   Вероятность не ответить на первый же вопрос совпадает с вероятностью $\Pr(\xi = 1)$ и равна $1 - 0.9 = 0.1$. Вероятность получить k дополнительных вопросов равна $\Pr(\xi = k) = 0.1 \cdot 0.9^{k-1}$, то есть получаем геометрическое распределение (**??**) случайной величины ξ. При этом максимальное значение вероятности получается в случае $k = 1$ и равно 0.1.

2. В урне находятся k белых и m черных шаров. Из нее последовательно вынимаются два шара. В первой схеме эксперимента они в урну обратно не возвращаются, во второй — возвращаются. Случайная величина ξ равна количеству вытащенных белых шаров. Найдите распределение вероятностей этой случайной величины для обеих схем проведения случайного эксперимента. Сосчитайте математическое ожидание ξ в этих схемах.

   Решение

   В случае, когда шары в урну обратно не возвращаются, мы имеем гипергеометрическое распределение (**??**) случайной величины ξ, принимающей значения из множества $X = \{0, 1, 2\}$. Как следствие, распределение вероятностей этой случайной величины имеет вид

$$\Pr(\xi = 0) = \frac{m\,(m-1)}{(k+m)\,(k+m-1)}, \Pr(\xi = 1) = \frac{2km}{(k+m)\,(k+m-1)},$$

$$\Pr(\xi = 2) = \frac{k\,(k-1)}{(k+m)\,(k+m-1)}.$$

   В случае схемы с возвращениями вероятности $\Pr(\xi = i)$, $i = 0, 1, 2$, равны

$$\Pr(\xi = 0) = \frac{m^2}{(k+m)^2}, \qquad \Pr(\xi = 1) = \frac{2km}{(k+m)^2}, \qquad \Pr(\xi = 2) = \frac{k^2}{(k+m)^2}.$$

   Математическое ожидание для обоих случаев совпадает и равно

$$(\xi) = \frac{2k}{k+m}.$$

3. Найдите математическое ожидание геометрического распределения.

   Решение

   По определению математического ожидания,

$$(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}.$$

   Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Дифференцируя левую и правую часть этого равенства по q, мы получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Следовательно, математическое ожидание для геометрического распределения равно $1/p$. Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой (**??**):

$$(\xi) = (\xi^2) - ((\xi))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p \cdot q^{k-1} - \frac{1}{p^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p \cdot q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= p \cdot q \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Сумма

$$\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2}$$

представляет собой вторую производную суммы бесконечной геометрической прогрессии, равной $1/(1-q)$. Как следствие,

$$q\left(\frac{1}{1-q}\right) = q\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3},$$

так что дисперсия случайной величины, подчиняющейся геометрическому распределению, равна

$$(\xi) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

4. Предположим, что игральным картам присвоены следующие стоимости: туз имеет стоимость, равную одному доллару, двойка — 2 доллара, ..., десятка — 10 долларов, валет — 11, дама — 12, король — 13. Игрок вытягивает одну карту. В случае, если эта карта бубновой масти, игрок получает ее стоимость. Если червовой, то ее стоимость удваивается. Если карта черной масти, то игрок платит 10 долларов. Чему равно математическое ожидание выигрыша?

   Решение

   Пусть ξ есть случайная величина, равная выигранной сумме. По определению математического ожидания,

$$(\xi) = \frac{1}{52} + \frac{2}{52} + \frac{3}{52} + \cdots + \frac{13}{52} + \frac{2 \cdot 1}{52} + \frac{2 \cdot 2}{52} + \frac{2 \cdot 3}{52} + \cdots + \frac{2 \cdot 13}{52} - 10 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 3 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} \cdot \frac{1}{52} - 5 = 5.25 - 5 = 0.25.$$

5. Предположим, что случайная величина $\tilde{\xi}$ принимает только неотрицательные значения, α — некоторая положительная константа. Докажите, что вероятность

$$\Pr(\tilde{\xi} \geq \alpha) \leq \frac{E(\tilde{\xi})}{\alpha}. \qquad (1)$$

6. Восемь шаров, пронумерованных числами $0, 1, 1, 2, 2, 2, 5$ и 10 соответственно, помещены в урну. Игрок вытягивает три из них и получает выигрыш в сумме, равной сумме чисел на трех шарах. Каково математическое ожидание выигрыша в такой игре?

7. Предположим, что у вас имеется связка из n ключей, лишь один из которых подходит к вашей двери. Вы случайным образом выбираете ключи из связки и пытаетесь открыть дверь. В первом случае вы снимаете из связки неподошедшие ключи, во втором оставляете их в связке. Подчитайте математическое ожидание количества попыток открыть дверь в первом и во втором случаях.