

### 13 ноября 2020. Основные понятия теории графов.

1. Подсчитайте количество ребер в полном двудольном графе  $K_{m,n}$  на  $|V(K_{m,n})| = n + m$  вершинах. Что можно сказать о параметрах  $m$  и  $n$  в случае, если  $K_{m,n}$  является  $k$ -регулярным?
2. А что можно сказать о размере долей двудольного  $k$ -регулярного графа (не обязательно полного)?
3. Пусть  $G$  — простой граф, построенный на 9 вершинах. Предположим, что сумма степеней вершин графа  $G$  больше или равна 27. Правда ли, что в таком графе обязательно существует вершина, степень которой больше или равна 4?
4. Доказать, что связный граф, степени всех вершин которого четны, остается связным при удалении любого ребра.
5. Пусть  $G$  есть регулярный простой связный граф, имеющий 22 ребра. Сколько вершин может содержать данный граф?
6. Доказать, что любой маршрут, соединяющий вершины  $x$  и  $y$ , содержит простой путь, соединяющий те же самые вершины.
7. Доказать, что простой граф  $G$ , минимальная степень  $\delta(G)$  которого больше или равна  $n/2$ , является связным. Показать, что эта оценка точная, предъявив несвязный граф с  $\delta(G) = n/2 - 1$ .
8. Доказать, что дополнение несвязного графа является связным.
9. Последовательностью степеней вершин графа, или степенной последовательностью (degree sequence), называется список всех степеней вершин графа  $G$ , записанный в порядке невозрастания:

$$\deg(x_1) \geq \deg(x_2) \geq \dots \geq \deg(x_n).$$

Докажите, что невозрастающая последовательность  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  целых неотрицательных чисел является степенной последовательностью некоторого графа  $G$  тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число.

10. Невозрастающая последовательность неотрицательных чисел

$$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \dots, d_n), \quad d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0,$$

называется *графовой*, если она является последовательностью степеней вершин некоторого *простого* графа  $G$ . Покажите, что последовательности чисел  $(1, 1, 0)$  и  $(2, 2, 1, 1)$  являются графовыми, предъявив для каждой из них соответствующие им простые графы.

11. Доказать, что простой граф  $G$ , построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.