Теория категорий

Категориальная логика

Валерий Исаев

16 апреля 2019 г.

План лекции

Интерпретация логических теорий

- Интерпретация
- Корректность интерпретации

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Интерпретация теории типов

Интерпретация сигнатуры

Пусть **C** – декартова категория. Тогда интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ в **C** состоит из следующих данных:

- Функция $[\![-]\!] : \mathcal{S} \to Ob(\mathbf{C})$.
- Функция $[\![-]\!]$, сопоставляющая каждому $(\sigma : s_1 \times \ldots \times s_n \to s) \in \mathcal{F}$ морфизм $[\![\sigma]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$.
- Функция $[\![-]\!]$, сопоставляющая каждому $(R : s_1 \times \ldots \times s_n) \in \mathcal{P}$ мономорфизм $[\![R]\!] : d_R \to [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.

Интерпретация термов

Пусть **C** – декартова категория и $[\![-]\!]$ – некоторая интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Если t – терм этой сигнатуры сорта s со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \ldots x_n : s_n\}$, то мы можем определить его интерпретацию $[\![t]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$ следующим образом:

- $[\![x_i]\!] = \pi_i$.
- $[\![\sigma(t_1, \ldots t_n)]\!] = [\![\sigma]\!] \circ \langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_n]\!] \rangle$.

Модели алгебраических теорий

- Пусть $\mathcal{A}$ – алгебраическая теория, то есть множество аксиом вида $t_1 = t_2$.
- Тогда модель этой теории в декартовой категории **C** – это интерпретация сигнатуры теории, такая что для любой аксиомы $t_1 = t_2$ верно $[\![t_1]\!] = [\![t_2]\!]$.

Интерпретация формул в **Set**

- Прежде чем описать интерпретацию формул в произвольной конечно полной категории, вспомним как она описывается в **Set**.
- В **Set** формулы интерпретируются как подмножества.
- Пусть $[\![-]\!]$ сопоставляет каждому $(R : s_1 \times \ldots \times s_n) \in \mathcal{S}$ подмножество множества $[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.
- Пусть $V = x_1 : s_1, \ldots x_k : s_k$ – упорядоченное множество переменных. Тогда функция интерпретации $[\![-]\!]$ сопостовляет каждой формуле из $Form_\Sigma(V)$ подмножество множества $[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_k]\!]$.

Интерпретация формул в **Set**

- $[\![\bot]\!]$ – пустое подмножество.
- $[\![\top]\!]$ – всё множество.
- $[\![\neg\varphi]\!]$ – дополнение подмножества $[\![\varphi]\!]$.
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$.
- $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$.
- Упражнение: опишите интерпретацию импликации, кванторов и равенства.

Истинность формул в **Set**

- Интерпретация замкнутой формулы – это подмножество одноэлементного множества.
- Следовательно, либо одноэлементное множество, либо пустое.
- В первом случае говорят, что эта формула *истинна* в этой интерпретации, во втором, что она *ложна*.

Интерпретация формул в конечно полной категории

- Пусть $\mathbf{C}$ – конечно полная категория.
- Тогда формулы со свободными переменными в V интерпретируются как подобъекты $[\![V]\!]$.
- Если $[\![t_1]\!], [\![t_2]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$, то формула $t_1 = t_2$ интерпретируется как уравнитель $[\![t_1]\!]$ и $[\![t_2]\!]$.
- Формула $\varphi = R(t_1, \ldots t_k)$ интерпретируется как пулбэк $[\![R]\!]$:

$$\begin{tikzcd}
d_\varphi \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_R \arrow[d, hook, "{[\![R]\!]}"] \\
{[\![V]\!]} \arrow[r, "{\langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_k]\!] \rangle}"'] & {[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_k]\!]}
\end{tikzcd}$$

Истинность секвенций

- Мы будем говорить, что секвенция $\varphi \longmapsto \psi$ истина в некоторой интерпретации $[\![-]\!]$, если подобъект $[\![\varphi]\!]$ является подобъектом $[\![\psi]\!]$.
- В частности мы можем говорить, что формула ψ истина, если истина секвенция $\top \longmapsto \psi$; другими словами, если $[\![\psi]\!]$ – максимальный подобъект, то есть изоморфизм.
- Модель некоторой теории логики первого порядка – это интерпретация, такая что все аксиомы в ней истины.

Интерпретация $\top$ и $\wedge$

- $\top$ интерпретируется как максимальный объект.
- Наибольший подобъект объекта X – это id_X.
- $\varphi \wedge \psi$ интерпретируется как пересечение подобъектов $[\![\varphi]\!]$ и $[\![\psi]\!]$.

Корректность $\top$

- Разумеется мы хотим, чтобы интерпретация уважала правила вывода.
- Правило вывода для $\top$:

$$\varphi \vdash \top$$

- Чтобы доказать, что эта аксиома всегда корректна, нужно проверить, что для любой подобъект $d_\varphi \hookrightarrow V$ является подобъектом $[\![\top]\!] = id_V : V \hookrightarrow V$, что очевидно.

Корректность $\wedge$

- Правила вывода для $\wedge$:

$$\frac{\varphi \longmapsto \psi \qquad \varphi \longmapsto \chi}{\varphi \longmapsto \psi \wedge \chi}$$

$$\frac{\varphi \longmapsto \psi \wedge \chi}{\varphi \longmapsto \psi} \qquad \frac{\varphi \longmapsto \psi \wedge \chi}{\varphi \longmapsto \chi}$$

- Эти правила уважаются, так как по определению пулбэков стрелка $[\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!] \cap [\![\chi]\!]$ существует тогда и только тогда, когда существуют стрелки $[\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]$ и $[\![\varphi]\!] \to [\![\chi]\!]$.

Интерпретация $\exists$

- Теории, в которых формулы состоят только из равенств, конъюнкций, $\top$ и $\exists$ называются *регулярными*.
- Мы не можем проинтерпретировать $\exists$ в произвольной конечно полной категории.
- Категории, где можно это сделать, называются *регулярными*.
- Формальное определение будет дано ниже.

Интерпретация $\exists$ в **Set**

- Пусть $[\![\varphi(x, x_1, \ldots x_n)]\!] : d_\varphi \hookrightarrow [\![s]\!] \times [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.
- Как проинтерпретировать $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1 \ldots x_n))$?
- Если рассмотреть $\pi_{1,\ldots,n} \circ [\![\varphi]\!] : d_\varphi \to [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$, то это почти дает нам интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \ldots x_n))$, так как прообраз некоторого элемента $(a_1, \ldots a_n)$ населен тогда и только тогда, когда существует $a \in [\![s]\!]$, такой что $(a, a_1, \ldots a_n) \in [\![\varphi]\!]$.
- Единственная проблема заключается в том, что $\pi_{1,\ldots,n} \circ [\![\varphi]\!]$ не является мономорфизмом.
- Мы можем решить эту проблему, определив интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \ldots x_n))$ как образ $\pi_{1,\ldots,n} \circ [\![\varphi]\!]$.

Образ морфизма

- Мы можем обобщить понятие образа функции на произвольную категорию.
- *Образ* морфизма $f : A \to B$ – это наименьший мономорфизм $\mathrm{Im}\, f \hookrightarrow B$, через который f факторизуется.
- Другими словами, существует стрелка $A \to \mathrm{Im}\, f$, такая что для любых стрелок $g : A \to C$ и $h : C \hookrightarrow B$ если $h \circ g = f$, то $\mathrm{Im}\, f$ является подобъектом C:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Im}\, f \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\
 & C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Интерпретация существования

- В произвольной категории образ может не существовать, но он уникален, если существует.
- Если предположить, что в категории существуют образы, то можно попробовать проинтерпретировать существование так же как и в **Set**.
- Если $[\![\varphi(x, x_1, \ldots x_n)]\!] : d_\varphi \hookrightarrow [\![s]\!] \times [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$, то мы определяем $[\![\exists(x : s)\varphi]\!]$ как образ $\pi_{1,\ldots n} \circ [\![\varphi]\!]$.

Интерпретация подстановки

- Так как правила вывода для существования используют подстановку, нам нужно знать как она интерпретируется, чтобы проверить эти правила.
- Утверждене: если φ – формула со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \ldots x_n : s_n\}$ и $t_1, \ldots t_n$ – термы сортов $s_1, \ldots s_n$, то $[\![\varphi[x_1 := t_1, \ldots x_n := t_n]]\!]$ является пулбэком d_φ:

$$\begin{tikzcd}
d_{\varphi[x_1:=t_1,\ldots x_n:=t_n]} \arrow[r] \arrow[d, "{[\![\varphi[x_1:=t_1,\ldots x_n:=t_n]]\!]}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_\varphi \arrow[d, "{[\![\varphi]\!]}"] \\
V \arrow[r, "{\langle t_1,\ldots t_n\rangle}"'] & {[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]}
\end{tikzcd}$$

Интерпретация подстановки

- Доказывать это утверждение мы будем индукцией по φ.
- Для $\top$ это очевидно, так как пулбэк тождественного морфизма – тождественный морфизм.
- Проверим для равенства. Пусть $\llbracket t \rrbracket, \llbracket t' \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \ldots \times \llbracket s_n \rrbracket \to \llbracket s' \rrbracket$ и $\llbracket t_i \rrbracket : V \to \llbracket s_i \rrbracket$. Тогда нужно показать, что морфизм $E \to V$ в диаргамме ниже является уровнителем $\llbracket t \rrbracket \circ \langle \llbracket t_1 \rrbracket, \ldots \llbracket t_n \rrbracket \rangle$ и $\llbracket t' \rrbracket \circ \langle \llbracket t_1 \rrbracket, \ldots \llbracket t_n \rrbracket \rangle$, что легко сделать, используя универсальное свойство пулбэков.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & d_{t=t'} \arrow[d, "\llbracket t=t' \rrbracket"] & \\
V \arrow[r, "\langle \llbracket t_1 \rrbracket, \ldots \llbracket t_n \rrbracket \rangle"'] & \llbracket s_1 \rrbracket \times \ldots & \times \llbracket s_n \rrbracket \arrow[r, shift left, "\llbracket t \rrbracket"] \arrow[r, shift right, "\llbracket t' \rrbracket"'] & \llbracket s' \rrbracket
\end{tikzcd}$$

Интерпретация подстановки в $\exists$

- Даже если в категории существуют образы всех морфизмов, они могут не коммутировать с пулбэками.
- Категория называется *регулярной*, если у всех морфизмов существуют образы, и они стабильны относительно пулбэков.
- Таким образом, в любой регулярной категории подстановка действительно интерпретируется как пулбэк.

Корректность интерпретации $\exists$

- Правила вывода для $\exists$:

$$\frac{\exists(x:s)\varphi \longmapsto \psi}{\varphi \longmapsto \psi} \qquad \frac{\varphi \longmapsto \psi}{\exists(x:s)\varphi \longmapsto \psi}$$

- Обратите внимание, что ψ определен в контексте $x_1, \ldots x_n$, но используется также и в контексте $x_1, \ldots x_n, x$. По лемме об интерпретации подстановки ψ во втором контексте интерпретируется как пулбэк.
- Используя этот факт, легко показать, что данные правила корректны.

План лекции

- Интерпретация логических теорий
  - Интерпретация
  - Корректность интерпретации
- Когерентные теории
- Импликация и $\forall$
- Интерпретация теории типов

Определение

- Категория называется *когерентной*, если она регулярна, для любого объекта A в порядке подобъектов $\mathrm{Sub}(A)$ существуют все конечные копроизведения, и для любого морфизма $f : A \to B$ функтор $f^* : \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$ сохраняет их.
- Эта дополнительная структура – это в точности то, что необходимо для интерпретации ложного утверждения и дизъюнкций.

Дистрибутивность пересечений

Proposition

В когерентной категории пересечении дистрибутивно над объединением подобъектов: $A \cap (B \cup C) \simeq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *и* $A \cap 0 = 0$.

Доказательство.

Функтор $A \cap - : \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(X)$ можно определить как композицию

$$\mathrm{Sub}(X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Sub}(A) \xrightarrow{\exists_f} \mathrm{Sub}(X)$$

где $f : A \to X$ и $\exists_f$ – левый сопряженный к f^*. Функтор f^* сохраняет копроизведения по предположению когерентности, а $\exists_f$ сохраняет копределы как левый сопряженный. $\square$

Начальный объект

Proposition

В когерентной категории существует строгий начальный объект.

Доказательство.

Определим 0 как наименьший подобъект 1. Заметим, что $\pi_1 : X \times 0 \hookrightarrow X$ является наименьшим подобъектом X. Если у нас есть стрелка $X \to 0$, то π_1 является изоморфизмом. Другими словами, он является и наибольшим подобъектом X. Следовательно, у любого такого X ровно один подобъект – он сам. □

Начальный объект

Доказательство.

Докажем, что если есть морфизм $A \to 0$, то A является подобъектом 1. Дествительно, если у нас есть пара стрелок $f, g : B \to A$, то так как у нас есть стрелка $B \to 0$, то уравнитель f и g является изоморфизмом, то есть f и g равны. Следовательно $X \times 0$ изоморфен 0, то есть 0 – строгий. Докажем, что 0 – начальный. Так как у нас есть стрелка из $X \times 0$ в 0, то $X \times 0 \simeq 0$, а значит у нас есть стрелка из 0 в X. Если у нас есть стрелки $f, g : 0 \to X$, то их уравнитель является подобъектом 0, а значит изоморфизмом, то есть f и g равны. □

План лекции

Интерпретация логических теорий

Интерпретация

Корректность интерпретации

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Интерпретация теории типов

Квантор всеобщности

- Правила вывода для $\forall$ дуальны правилам для $\exists$:
$$\frac{\varphi \vdash \forall (x : s)\psi}{\varphi \vdash \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash \psi}{\varphi \vdash \forall (x : s)\psi}$$
- То есть у нас есть биекция между стрелками $\pi_1^*(\llbracket\varphi\rrbracket) \to \llbracket\psi\rrbracket$ в $\mathrm{Sub}(X \times \llbracket s\rrbracket)$ и $\llbracket\varphi\rrbracket \to \llbracket\forall (x : s)\psi\rrbracket$ в $\mathrm{Sub}(X)$, где $\pi_1 : X \times \llbracket s\rrbracket \to X$.
- Таким образом, $\llbracket\forall (x : s)\psi\rrbracket$ можно определить как $\forall_{\pi_1}(\llbracket\psi\rrbracket)$, где $\forall_{\pi_1} : \mathrm{Sub}(X \times \llbracket s\rrbracket) \to \mathrm{Sub}(X)$ – правый сопряженный к $\pi_1^* : \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(X \times \llbracket s\rrbracket)$.

Гейтинговы категории

- Категория называется *гейтинговой*, если она регулярна, у любого объекта существует минимальный подобъект и объединения подобъектов, и для любого морфизма $f : X \to Y$ существует правый сопряженный функтор $\forall_f : \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ к функтору $f^* : \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$.
- Так как гейтингова категория регулярна, то у функтора f^* есть и левый сопряженный. Таким образом, мы получаем цепочку сопряженных функторов:

$$\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$$

- Мы не требуем, чтобы f^* сохранял наименьший подобъект и объединения, так как это следует из того, что он левый сопряженный.

$\forall$ коммутирует с подстановкой

Чтобы доказать, что $\forall$ коммутирует с подстановкой, нам нужно доказать, что для любого пулбэка слева квадрат функторов справа коммутирует с точностью до изоморфизма.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "\forall_f"'] & \mathrm{Sub}(P) \arrow[d, "\forall_k"] \\ \mathrm{Sub}(C) \arrow[r, "g^*"'] & \mathrm{Sub}(B) \end{tikzcd}$$

∀ коммутирует с подстановкой

- Функторы в правом квадрате являются правыми сопряженными к следующим функторам:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(A) & \mathrm{Sub}(P) \arrow[l, "\exists_h"'] \\
\mathrm{Sub}(C) \arrow[u, "f^*"] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[l, "\exists_g"] \arrow[u, "k^*"']
\end{tikzcd}$$

- Так как этот квадрат коммутирует по регулярности, то квадрат на предыдущем слайде коммутирует по уникальности правых сопряженных функторов.

Импликация

- Интерпретация импликации определяется так же как интерпретация экспонент.
- То есть $[\![\varphi \to (-)]\!] : \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(X)$ – правый сопряженный к $[\![\varphi \wedge -]\!] = [\![\varphi]\!] \cap -$.
- Так как $A \cap -$ является композицией

$$\mathrm{Sub}(X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Sub}(A) \xrightarrow{\exists_f} \mathrm{Sub}(X)$$

  где $f : A \hookrightarrow X$, то правый сопряженный к нему существует в любой гейтинговой категории.
- Таким образом, мы можем проинтерпретировать $\varphi \to \psi$ как $\forall_{[\![\varphi]\!]}([\![\varphi]\!]^*(\psi))$.
- Так как $\forall_{[\![\varphi]\!]}$ и $[\![\varphi]\!]^*$ коммутируют с подстановкой, то и интерпретация импликации с ней коммутирует.

План лекции

Интерпретация логических теорий

Интерпретация

Корректность интерпретации

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Интерпретация теории типов

Интерпретация зависимых типов

- Утверждения в контексте $x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$ мы интерпретировали как мономорфизмы $X \hookrightarrow [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!]$.
- В теории типов это означает, что если тип B в контексте Γ является утверждением, то мы его интерпретируем как такой мономорфизм.
- Если B – произвольный тип, то он интерпретируется как произвольная стрелка $[\![B]\!] \to [\![\Gamma]\!]$.

Интерпретация Σ и Π

- Σ и Π типы интерпретируются как $\exists$ и $\forall$, только вместо категорий подобъектов Γ мы рассматриваем категории всех объектов над Γ.
- Таким образом, эти конструкции будут интерпретироваться через функторы $\Sigma_f, \Pi_f : \mathbf{C}/\Gamma \to \mathbf{C}/\Delta$:

$$\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f$$

  где $f^* : \mathbf{C}/\Delta \to \mathbf{C}/\Gamma$ – пулбэк функтор.
- Σ_f существует всегда, он определяется как $\Sigma_f(g) = f \circ g$.
- Конечно полная категория называется *локально декартово замкнутой*, если Π_f существует для любого морфизма $f : \Gamma \to \Delta$.

Существование Π

Proposition

Категория $\mathbf{C}$ *локально декартово замкнута тогда и только тогда, когда для любого ее объекта* Γ *категория* $\mathbf{C}/\Gamma$ *декартово замкнута.*

Доказательство.

В одну сторону доказательство такое же как для импликаций. Функтор $A \times - : \mathbf{C}/\Gamma \to \mathbf{C}/\Gamma$ равен следующей композиции:

$$\mathbf{C}/\Gamma \xrightarrow{p_A^*} \mathbf{C}/A \xrightarrow{\Sigma_A} \mathbf{C}/\Gamma$$

где $p_A : A \to \Gamma$. Следовательно экспоненту B^A в $\mathbf{C}/\Gamma$ можно определить как $\Pi_A(p_A^*(B))$. $\square$

Существование Π

Доказательство.

Пусть **C** – декартово замкнутая категория с конечными пределами. Докажем, что для любого объекта A у функтора $!_A^* : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/A$ есть правый сопряженный $\Pi_A : \mathbf{C}/A \to \mathbf{C}$.

Мы можем определить $\Pi_A(B)$ как объект функций $f : A \to B$, таких что $p_B \circ f = id_A$. Формально, $\Pi_A(B)$ определяется как уравнитель стрелок $[\![\lambda fa.p_B(f(a))]\!], [\![\lambda fa.a]\!] : B^A \to A^A$.

Теперь мы можем закончить доказательство. Если для всех Γ категория **C**/Γ декартово замкнута, то **C** – конечно полна, так как произведения в **C**/Γ – это пулбэки в **C**. Более того, существование Π следует из доказанного свойства, примененного к категории **C**/Γ. □

Правила вывода для Σ

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B[x := a]}{\Gamma \vdash (a, b) : \Sigma(x : A)\, B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : \Sigma(x : A)\, B}{\Gamma \vdash \pi_1\, p : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \Sigma(x : A)\, B}{\Gamma \vdash \pi_2\, p : B[x := \pi_1\, p]}$$

Термы $\Gamma \vdash a : A$ интерпретируются как сечения морфизма $p_A : [\![A]\!] \to [\![\Gamma]\!]$.
Если $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$ и $[\![b]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![a]\!]^*([\![B]\!])$, то $[\![(a, b)]\!]$ определяется как композиция $[\![b]\!]$ и $[\![a]\!]^*([\![B]\!]) \to [\![B]\!]$.
Если $[\![p]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]$, то $[\![\pi_1\, p]\!] = p_A \circ [\![p]\!]$ и $[\![\pi_2\, p]\!]$ определяется по универсальному свойству пулбэков.

Правила вывода для Π

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\, b : \Pi(x : A)\, B}$$

По сопряженности у нас есть биекция между сечениями $\Pi_{p_A}(\llbracket B \rrbracket) \to \llbracket \Gamma \rrbracket$ и $p_B : \llbracket B \rrbracket \to \llbracket A \rrbracket$. Так как $\llbracket b \rrbracket : \llbracket A \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$ – сечение, то мы можем определить интерпретацию $\lambda x.\, b$ как сечение $\Pi_{p_A}(\llbracket B \rrbracket) \to \llbracket \Gamma \rrbracket$.

$$\frac{\Gamma \vdash f : \Pi(x : A)\, B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f\, a : B[x := a]}$$

Так как $\llbracket f \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \to \Pi_{p_A}(\llbracket B \rrbracket)$ – сечение, то по биекции мы получаем сечение $f' : \llbracket A \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$. Интерпретацию $f\, a$ можно определить по универсальному свойству пулбэков. Для этого нужно построить стрелку $\llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$. Мы определяем ее как композицию $\llbracket a \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket A \rrbracket$ и $f' : \llbracket A \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$.

Проблемы интерпретации

- На самом деле, так определить интерпретацию нельзя, так как не получится доказать лемму о подстановке.
- В отличие от интерпретации кванторов, здесь нам нужно доказывать равенство не подобъектов, а объектов.
- Проблема в том, что у нас нет равенства, есть только изоморфизм.
- Эту проблему можно исправлять различными способами, но мы их рассматривать не будем.